جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

@jove_iut

www.jozve-iut.ir

به نام خالق یکتا

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده‌ی علوم ریاضی

نمونه‌ی آزمون‌های ریاضی عمومی ۲

@jozve_iut

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

آزمون پایان ترم درس ریاضی عمومی ۲ نیمسال دوم ۸۱—۸۰ مدت آزمون ۱۵۰ دقیقه

۱. تابع $f(x,y) = xe^y$ مفروض است.

الف) با استفاده از تعریف نشان دهید f در $(۰,۰)$ مشتق پذیر است.

ب) اکسترممهای f را روی ناحیه‌ی بسته و کراندار زیر به دست آورید:

$$\{(x,y)|۰ \leq x \leq ۱ - y^۲\}$$

۲. فرض کنید f تابعی مشتق پذیر است و z تابعی مشتق پذیر از x,y که در معادله‌ی $f(cx - az, cy - bz) = ۰$ صدق می‌کند(a,b,c اعداد حقیقی ثابت هستند). ثابت کنید:

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c$$

۳. فرض کنید T ناحیه‌ی محصور به استوانه‌های $x^۲ + y^۲ - ۲y = ۰$ ، $x^۲ + y^۲ - ۴y = ۰$ و مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و صفحه‌ی xoy باشد. مطلوب است محاسبه‌ی

الف) حجم ناحیه‌ی T.

ب) $\int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$ که S رویه‌ی بسته‌ی محصور کننده‌ی T است و $\mathbf{n}$ یکه‌ی نرمال قائم S رو به خارج است و $\mathbf{F}(x,y,z) = [x + \sin(yz)]\mathbf{i} + [y + e^{xz}]\mathbf{j} + [z + \sin(xy)]\mathbf{k}$.

@jozve_iut

۴. فرض کنید C منحنی حاصل از تلاقی سهمی‌گون $z = ۱ - x^۲ - y^۲$ و صفحه‌ی $z + ۲y = ۱$ باشد که جهت حرکت روی آن از طرف مثبت محور z عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. مطلوب است محاسبه‌ی $\int_C \mathbf{F}{\cdot}dr$ با فرض

$$\mathbf{F}(x,y,z) = xz^۲\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + x^۲\mathbf{k}$$

۵. مطلوب است محاسبه‌ی

الف) $\int\int_D v\, \cos(\frac{u}{v})\, dA$ که D ناحیه‌ی محدود به خطوط $v = u$ و $v = -u$ و $v = ۱$ می باشد.

ب) $\int\int_S (۱ - z)\, \cos(\frac{x - y}{x + y})\, d\sigma$ که S بخشی از صفحه‌ی $x + y + z = ۱$ است که در یک هشتم اول فضا قرار دارد.

((موفّق باشید))

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

۱ . فرض کنید $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تابع دومتغیره‌ی با تعریف زیر باشد

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{y} & y\neq 0\\ 2x & y=0\end{cases}$$

الف) برای بردار یکه‌ی $\vec{u}=a\,\vec{i}+b\,\vec{j}$ ، مشتق سویی $D_u\,f(0,0)$ را محاسبه کنید.
(توجه کنید که تابع f در $(0,0)$ مشتق پذیر نیست)

ب) تمام سوهای $\vec{u}=a\,\vec{i}+b\,\vec{j}$ را بیابید که در تساوی $D_u\,f(0,0)=1$ صدق می‌کنند.

۲ . فرض کنید $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ تابع با تعریف $f(x,y)=x^3+y^3-3x^2$ باشد.

الف) اکسترمم‌های مطلق تابع f روی ناحیه‌ی $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$ را بیابید.

ب) نشان دهید $\iint_D |f(x,y)|\ dA \leq 4\pi$.

@jozve_iut

۳ . فرض کنید T ناحیه‌ی محدود به داخل سهمیگون $z=x^2+y^2$ و خارج از مخروط $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ باشد.

الف) ناحیه‌ی T را بر حسب مختصات استوانه‌ای و کروی مشخص کنید.

ب) حجم T را محاسبه کنید.

۴ . فرض کنید C منحنی رسم شده در شکل زیر باشد. مطلوب است

$$\int_C \frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+4y^2}$$

۵ . فرض کنید S بخشی از سطح بیضیگون $4x^2+4y^2+z^2=5$ باشد که در ناحیه‌ی $z\geq 1$ قرار دارد و $\vec{n}$ قایم یکه‌ی بالایی بر سطح S باشد و $\vec{F}(x,y,z)=2xyz\ \vec{i}+(z-y^2z)\ \vec{j}+z^2\ \vec{k}$. مطلوب است

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\ d\sigma$$

تنها به یکی از دو سوال ۶ و ′۶ پاسخ دهید !

۶ . فرض کنید D ناحیه‌ی محدود بین منحنی‌های $xy=\pi$ و $y=0$ و $x=1$ و $x=2$ باشد. مطلوب است

$$\iint_D x\ |\cos(xy)|\ dA$$

′۶ . فرض کنید $b>0$ و $0\leq c<d\leq a$ و A مساحت بخشی از سطح کره‌ی $x^2+y^2+z^2=a^2$ باشد که بین صفحات $z=c$ و $z=d$ قرار دارد و B مساحت بخشی از سطح استوانه‌ی $x^2+y^2=b^2$ باشد که بین این صفحات قرار دارد. نشان دهید $\dfrac{A}{B}=\dfrac{a}{b}$.

موفّق باشید.

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

۱ . فرض کنید C منحنی $y = \ln x$ باشد. مطلوب است

الف) تابع انحنای C و تعیین نقطه‌ای از C که دارای بیشترین انحناست.

ب) مرکز و شعاع انحنای C در نقطه $(۱, ۰)$.

۲ . فرض کنید S سطح دوار حاصل از دوران منحنی $x^۲ - z^۲ = ۱$ حول محور z ها باشد. مطلوب است

الف) معادله و نمودار سطح S .

ب) معادله‌ی خطوط واقع بر سطح S و مار بر نقطه‌ی $(۱, ۱, ۱)$.

۳ . فرض کنید $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ تابع دومتغیره‌ی با تعریف زیر باشد

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y| \ \sin x}{|x| + |y|} & (x,y) \neq (۰, ۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰, ۰) \end{cases}$$

@jozve_iut

الف) نشان دهید تابع f در $(۰, ۰)$ پیوسته است.

ب) تمام سوهای یکه‌ی $\vec{u} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j}$ را بیابید که در تساوی زیر صدق می‌کنند

$$D_u\, f(۰, ۰) = \nabla f(۰, ۰) \cdot \vec{u}$$

۴ . معادله‌ی خط مماس بر منحنی فصل مشترک سطوح $z = x^۲ + y^۲$ و $۲\,x^۲ + ۲\,y^۲ + z^۲ = ۸$ را در نقطه‌ی $(-۱, ۱, ۲)$ مشخص کنید.

۵ . فرض کنید $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و z به عنوان تابعی از متغیرهای مستقل x و y با معادله‌ی $x - y = f(z - x\,,\, z - y)$ داده شده باشد. نشان دهید

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = ۱$$

٦ . اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x,y) = x^۲ + y^۲ - ۲\,(x + y)$ را روی ناحیه زیر پیدا کنید

$$D = \{\, (x,y) \mid x^۲ + y^۲ \leq ۴,\ x \geq ۰,\ y \geq ۰ \,\}$$

مدت آزمون ۱۴۰ دقیقه .... **موفّق باشید.**

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

۱) خم C به معادله‌ی $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t\,\vec{j} + \sqrt{1 - 2t^2}\,\vec{k}$ مفروض است.

الف) ثابت کنید انحنای خم C در تمام نقاط ثابت است.

ب) ثابت کنید خم C مسطح است. (۱۵ نمره)

---

۲) رویه‌ی S به معادله‌ی $z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$ روی $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le e^2\}$ را توصیف کرده و نمودار آن را رسم نمایید. (۱۰ نمره)

---

۳) تابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^5 - 3y^5}{(x^2 + y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید f در $(0,0)$ پیوسته است.

ب) مشتقات جزیی f را در $(0,0)$ محاسبه کنید.

@jozve_iut

ج) نشان دهید f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست. (۱۵ نمره)

---

۴) فرض کنید توابع حقیقی یک متغیره‌ی f و g دست کم دوبار مشتق‌پذیر باشند. اگر $u = u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$، نشان دهید $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. (۱۵ نمره)

---

۵) رویه‌ی S به معادله‌ی $z = xy - y + 1$ و خم C واقع بر S به معادله‌ی $x = t$ ، $y = 3 - t$ و $z = -t^2 + 4t - 2$ مفروضند.

الف) نشان دهید صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی S در هر نقطه‌ی دلخواه از خم C، بر صفحه‌ی π به معادله‌ی $x + y + 2z = 0$ عمود است.

ب) در چه نقطه یا نقاطی از رویه‌ی S صفحه‌ی مماس بر رویه با صفحه‌ی π موازی است؟ (۱۵ نمره)

موفق باشید

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

کلید آزمون میان ترم ریاضی عمومی II . فروردین ۱۳۸۵

۱) خم C به معادله‌ی $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t\,\vec{j} + \sqrt{1-2t^2}\,\vec{k}$ مفروض است.

الف) ثابت کنید انحنای خم C در تمام نقاط ثابت است.

ب) ثابت کنید خم C مسطح است.

پاسخ الف.

$$\vec{r}'(t) = \vec{i} + \vec{j} - \frac{2t}{\sqrt{1-2t^2}}\vec{k} \quad , \quad \vec{r}''(t) = -\frac{2t}{(\sqrt{1-2t^2})^3}\vec{k}$$

$$\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -\frac{2t}{\sqrt{1-2t^2}} \\ 0 & 0 & -\frac{2t}{(\sqrt{1-2t^2})^3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{(\sqrt{1-2t^2})^3}\vec{i} + \frac{2}{(\sqrt{1-2t^2})^3}\vec{j}$$

$$||\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)|| = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{1-2t^2})^3} \quad , \quad ||\vec{r}'(t)|| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2t^2}}$$

درنتیجه $\kappa = \frac{||\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)||}{||\vec{r}'(t)||^3} = 1$.

@jozve_iut

پاسخ ب. باید ثابت کنیم بردار قائم دوم خم، یک بردار ثابت است.

روش اول.

$$B = \frac{\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)}{||\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)||} = \frac{(\sqrt{1-2t^2})^3}{2\sqrt{2}}\left(-\frac{2}{(\sqrt{1-2t^2})^3}\vec{i} + \frac{2}{(\sqrt{1-2t^2})^3}\vec{j}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

روش دوم.

$$T = \frac{\vec{r}'(t)}{||\vec{r}'(t)||} = \frac{\sqrt{1-2t^2}}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{\sqrt{1-2t^2}}{\sqrt{2}}\vec{j} - \sqrt{2}\vec{k}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{-\sqrt{2}t}{\sqrt{1-2t^2}}\vec{i} + \frac{-\sqrt{2}t}{\sqrt{1-2t^2}}\vec{j} - \sqrt{2}\vec{k}$$

$$||\frac{dT}{dt}|| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2t^2}} \quad , \quad N = \frac{dT/dt}{||dT/dt||} = -t\vec{i} - t\vec{j} - \sqrt{1-2t^2}\vec{k}$$

و درنتیجه

$$B = T\times N = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\sqrt{1-2t^2}}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{1-2t^2}}{\sqrt{2}} & -\sqrt{2}t \\ -t & -t & -\sqrt{1-2t^2} \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

یعنی B یک بردار ثابت.

۲) رویه‌ی S به معادله‌ی $z = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ روی $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le e^2\}$ را توصیف کرده و نمودار آن را رسم نمایید.

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

پاسخ. با توجه به این که $z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\ln(\sqrt{x^2+y^2})$، معادله‌ی رویه را می توان به ازای $F(x,z)=z-\ln x$ یا $F(y,z)=z-\ln y$ به صورت $F(\sqrt{x^2+y^2},z)=0$ در نظر گرفت.

پس می‌توان گفت S رویه‌ای است دوار که از دوران خم $z=\ln x$ به ازای $1\le x\le e$ یا از دوران خم $z=\ln y$ به ازای $1\le y\le e$ حول محور z—ها به دست آمده است.

۳) تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^5-3y^5}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید f در $(0,0)$ پیوسته است.

ب) مشتقات جزیی f را در $(0,0)$ محاسبه کنید.

ج) نشان دهید f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست.

پاسخ الف . باید نشان دهیم

$$\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,\delta>0\ :\ \forall\,(x,y)\ (\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta\Rightarrow\left|\frac{2x^5-3y^5}{(x^2+y^2)^2}-0\right|<\varepsilon)$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{2x^5-3y^5}{(x^2+y^2)^2}-0\right| &\le 2|x|(\frac{x^2}{x^2+y^2})^2+3|y|(\frac{y^2}{x^2+y^2})^2\\ &\le 2|x|+3|y|\\ &\le 5\sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}$$

@jozve_iut

پس برای $\varepsilon>0$ کافی است قرار دهیم $\delta=\frac{1}{5}\varepsilon$. در این صورت داریم

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta=\frac{1}{5}\varepsilon\Rightarrow 5\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{2x^5-3y^5}{(x^2+y^2)^2}-0\right|<\varepsilon$$

پاسخ ب.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\frac{2h^5}{h^5}=2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim\frac{3h^5}{h^5}=3$$

پاسخ ج. فرض کنیم تابع f در نقطه‌ی $(0,0)$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت توابع α و β وجود دارند به قسمی که $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\beta(x,y)=0$ و $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\alpha(x,y)$ و

$$f(x,y)-f(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y+\alpha(x,y)x+\beta(x,y)y$$

(برای سادگی به جای Δx از x و به جای Δy از y استفاده شده است.) بنابر این باید داشته باشیم

$$\frac{2x^5-3y^5}{(x^2+y^2)^2}=2x+3y+\alpha(x,y)x+\beta(x,y)y\ \ ,\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\alpha(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\beta(x,y)=0$$

به ویژه روی مسیر به معادله‌ی $x=t\ ,\ y=t$ داریم

$$\frac{2t^5-3t^5}{(t^2+t^2)^2}=2t+3t+\alpha(t,t)\,t+\beta(t,t)\,t$$

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

یا
$$-t = ۵t + \alpha(t,t)\, t + \beta(t,t)\, t$$

که با تقسیم دو طرف بر $t \neq ۰$ این معادله هم ارز است با
$$-۶ = \alpha(t,t) + \beta(t,t)$$

اما این غیر ممکن است زیرا از $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)} \alpha(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)} \beta(x,y) = ۰$ نتیجه می‌شود $-۶ = \lim\limits_{t\to ۰}(\alpha(t,t) + \beta(t,t)) = ۰$.

۴) فرض کنید توابع حقیقی یک متغیره‌ی f و g دست کم دوبار مشتق‌پذیر باشند. اگر $u = u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$، نشان دهید $\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y} - ۲\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} = ۰$.

پاسخ.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x+y) + xf'(x+y) + g'(x+y)$$
$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} = ۲f'(x+y) + xf''(x+y) + yg''(x+y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = xf'(x+y) + g(x+y) + yg'(x,y)$$
$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} = ۲g'(x+y) + xf''(x+y) + yg''(x+y)$$
$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y} = f'(x+y) + xf''(x+y) + g'(x+y) + yg''(x+y)$$

به این ترتیب
$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} - ۲\frac{\partial^۲ u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = ۰$$

۵) رویه‌ی S به معادله‌ی $z = xy - y + ۱$ و خم C واقع بر S به معادله‌ی $x = t$، $y = ۳ - t$ و $z = -t^۲ + ۴t - ۲$ مفروضند.

الف) نشان دهید صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی S در هر نقطه‌ی دلخواه از خم C، بر صفحه‌ی π به معادله‌ی $x + y + ۲z = ۰$ عمود است.

ب) در چه نقطه یا نقاطی از رویه‌ی S صفحه‌ی مماس بر رویه با صفحه‌ی π موازی است؟

پاسخ الف. معادله‌ی ضمنی رویه‌ی S عبارت است از $F(x,y,z) = z - xy + y - ۱ = ۰$. پس
$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\vec{k} = -y\,\vec{i} + (۱ - x)\,\vec{j} + \vec{k}$$

از سوی دیگر بردار نرمال صفحه‌ی π عبارت است از $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + ۲\vec{k}$. بنابراین در هر نقطه‌ی دلخواه از خم C به مختصات $x = t$، $y = ۳ - t$ و $z = -t^۲ + ۴t - ۲$ داریم $\vec{n}\cdot\nabla F = (\vec{i} + \vec{j} + ۲\vec{k})\cdot(-(۳-t)\,\vec{i} + (۱-t)\,\vec{j} + \vec{k}) = (t-۳) + (۱-t) + ۲ = ۰$.

پاسخ ب.

روش اول. در نقاطی از رویه‌ی S صفحه‌ی مماس بر رویه با صفحه‌ی π موازی است که $\vec{n} \| \nabla F$ یعنی

@jozve_iut
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

$\frac{۱}{۲} = \frac{۱-x}{۱} = \frac{-y}{۱}$ پس $x = \frac{۱}{۲} = -y$. به این ترتیب $z = xy - y + ۱ = \frac{۵}{۴}$. بنابر این تنها جواب نقطه‌ی $(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۴})$ است.

روش دوم . در نقاطی از رویه‌ی S صفحه‌ی مماس بر رویه با صفحه‌ی π موازی است که $\vec{n} \times \nabla F = \vec{۰}$ یعنی $\vec{۰} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۱ & ۱ & ۲ \\ -y & ۱-x & ۱ \end{vmatrix}$ یا $(۲x-۱)\vec{i} - (۱+۲y)\vec{j} + (۱-x+y)\vec{k} = \vec{۰}$. پس $x = \frac{۱}{۲} = -y$. به این ترتیب $z = xy - y + ۱ = \frac{۵}{۴}$. بنابر این تنها جواب نقطه‌ی $(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۴})$ است.

@jozve_iut

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

۱. تابع $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ مفروض است. کلیه‌ی بردارهای یکه $u=a\,\mathbf{i}+b\,\mathbf{j}$ را مشخص کنید که برای آنها داشته باشیم $D_uf(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot u$.

(۱۰ نمره)

---

۲. اکسترمم‌های مطلق و نسبی تابع $f(x,y)=2+x^2+y^2$ را روی ناحیه‌ی بسته و کراندار $D=\{\ (x,y)\ :\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leq 1\ \}$ به دست آورید.

(۱۵ نمره)

---

۳. فرض کنید D ناحیه‌ی محصور بین خطوط $x+y=1$ ، $x+y=2$ ، $x=0$ و $y=0$ است. مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال

@jozve_iut

$$\iint_D \frac{(x-y)^2}{(x+y)^3}\,dA$$

(۱۵ نمره)

---

۴. فرض کنید D ناحیه‌ی درون مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ محصور توسط کره‌ی $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$ است ($a>0$ ثابت). مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال زیر (۱۵ نمره)

$$\iiint_D \left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2}-3\right)dV$$

(بقیه‌ی پرسش‌ها، پشت برگه می‌باشند)

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

۵. فرض کنید $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ توابعی با مشتقات مرتبه‌ی دوم پیوسته هستند و $f(0)=1$.
مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال

$$\int_C \big(2xf(y)+y^2g'(x)\big)\,dx \;+\; \big(x^2f'(y)+2yg(x)\big)\,dy$$

که در آن C نیم‌دایره‌ی بالایی از دایره‌ی $x^2+y^2=2x$ پیموده شده از نقطه‌ی $A=(0,0)$ به نقطه‌ی $B=(2,0)$ است.

(۲۰ نمره)

---

۶. فرض کنید S بخشی از سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ زیر صفحه‌ی $z=2$ است. برای

$$F(x,y,z)=(8x+\sin(y^2z))\,\mathbf{i}+(2y-e^{xz})\,\mathbf{j}-6z\,\mathbf{k}$$

مطلوب است محاسبه‌ی $\iint_S F\cdot n\,d\sigma$ ، که در آن n قائم یکه‌ی رو به سمت خارج S است.

@jozve_iut

(۲۰ نمره)

---

۷. فرض کنید π صفحه‌ای با بردار نرمال یکه‌ی $n=a\,\mathbf{i}+b\,\mathbf{j}+c\,\mathbf{k}$ و γ مسیر بسته‌ی ساده‌ای در π است. برای میدان $F(x,y,z)=(bz-cy)\,\mathbf{i}+(cx-az)\,\mathbf{j}+(ay-bx)\,\mathbf{k}$ نشان دهید که مقدار $\frac{1}{2}\int_\gamma F\cdot dr$ برابر است با مساحت ناحیه‌ای از صفحه‌ی π که توسط منحنی γ محصور شده است.

(۱۵ نمره)

موفق باشید

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

پاسخ پرسش ۱.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$$

بنابراین $\nabla f(0,0)=(0,0)$ و در نتیجه $\nabla f(0,0)\cdot u=0$. (۳ نمره)

از طرف دیگر

$$D_u f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3a^2b}{t^2(a^2+b^2)}-0}{t}=\frac{a^2b}{a^2+b^2}=a^2b \quad \text{(۴ نمره)}$$

بنابراین $\nabla f(0,0)\cdot u=0$ $D_u f(0,0)=$ اگر و تنها اگر $a^2b=0$ (یعنی $a=0$ یا $b=0$).
به این ترتیب جهت‌های خواسته شده عبارتند از $\mathbf{i}$، $-\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، $-\mathbf{j}$. (۳ نمره)

پاسخ پرسش ۲. برای تابع $f(x,y)=2+x^2+y^2$ داریم

@jozve_iut

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$$

بنابر این

$$\nabla f=0 \Rightarrow x=y=0$$

پس $P_0=(0,0)$ تنها نقطه‌ی بحرانی f است.

از سوی دیگر

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)=2 \quad , \quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)=2 \quad , \quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(P_0)=0$$

پس $\Delta(P_0)=AC-B^2=4>0$. بنابر این f در P_0 یک مینیمم نسبی دارد. (۵ نمره)

روی مرز ناحیه‌ی D از روش تکثیرکنندگان لاگرانژ استفاده می‌کنیم.

$$H(x,y,\lambda)=2+x^2+y^2-\lambda(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-1)$$

دستگاه زیر به دست می‌آید.

$$1) \quad H_x=2x-\lambda\frac{x}{2}=0$$

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

$$۲)\quad H_y = ۲y - ۲\lambda \frac{y}{۹} = ۰$$

$$۳)\quad H_\lambda = \frac{x^۲}{۴} + \frac{y^۲}{۹} - ۱ = ۰$$

(۴ نمره)

از معادله‌ی اول $x = ۰$ یا $\lambda = ۴$ و از معادله‌ی دوم $y = ۰$ یا $\lambda = ۹$ به دست می‌آید. به ازای $x = ۰$ از معادله‌ی سوم $y = \pm ۳$ و به ازای $y = ۰$ از معادله‌ی سوم $x = \pm ۲$ به دست می‌آید.

بنابر این جواب‌های دستگاه عبارت است از

$$x = ۰ \ , \ y = ۳ \ , \ \lambda = ۹ \ \Rightarrow \ P_۱ = (۰, ۳)$$

$$x = ۰ \ , \ y = -۳ \ , \ \lambda = ۹ \ \Rightarrow \ P_۲ = (۰, -۳)$$

$$x = ۲ \ , \ y = ۰ \ , \ \lambda = ۴ \ \Rightarrow \ P_۳ = (۲, ۰)$$

$$x = -۲ \ , \ y = ۰ \ , \ \lambda = ۴ \ \Rightarrow \ P_۴ = (-۲, ۰)$$

(۴ نمره)

@jozve_iut

از $f(P_۱) = f(P_۲) = ۱۱$ ، $f(P_۳) = f(P_۴) = ٦$ و $f(P_۰) = ۲$ نتیجه می‌شود $P_۱$ و $P_۲$ ماکزیمم مطلق و $P_۰$ مینیمم مطلق f روی D هستند. (۲ نمره)

پاسخ پرسش ۳. با انتخاب $x + y = u$ و $x - y = v$ خواهیم داشت

$$y = \frac{۱}{۲}(u - v) \quad , \quad x = \frac{۱}{۲}(u + v)$$

بنابراین

$$\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = \left| \begin{vmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \end{vmatrix} \right| = \frac{۱}{۲}$$

(٦ نمره)

مرزهای ناحیه‌ی جدید D^* حاصل از تغییر مختصات (x, y) به (u, v) عبارت است از

$$x = ۰ \Rightarrow u + v = ۰ \Rightarrow v = -u \quad , \quad y = ۰ \Rightarrow u - v = ۰ \Rightarrow v = u$$

و نیز

$$۱ \leq x + y \leq ۲ \Rightarrow ۱ \leq u \leq ۲$$

به این ترتیب

$$D^* = \{(u, v) \ : \ ۱ \leq u \leq ۲ \ , \ -u \leq v \leq u\}$$

(۴ نمره)

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

(۵ نمره)

$$\iint_D \frac{(x-y)^۲}{(x+y)^۳}dA = \frac{۱}{۲}\int_۱^۲\int_{-u}^{u}\frac{v^۲}{u^۳}dv\,du = \frac{۱}{۲}\int_۱^۲ \frac{v^۳}{۳u^۳}\Big|_{v=-u}^{v=u} du = \frac{۱}{۳}\int_۱^۲ du = \frac{۱}{۳}$$

پاسخ پرسش ۴. از تعریف ناحیه‌ی D دیده می‌شود که استفاده از مختصات کروی مناسب‌تر است. از حل دستگاه

$$\begin{cases} x^۲+y^۲+(z-a)^۲=a^۲ \\ z=\sqrt{x^۲+y^۲} \end{cases}$$

@jozve_iut

نتیجه می‌شود $z=a$ ، یعنی مخروط و کره یکدیگر را در دایره‌ی $x^۲+y^۲=a^۲$ و $z=a$ قطع می کنند. در ناحیه‌ی D ، تغییرات ϕ به صورت $۰\le\phi\le\frac{\pi}{۴}$ و تغییرات θ به صورت $۰\le\theta\le ۲\,\pi$ می‌باشد. در ضمن معادله‌ی $x^۲+y^۲+(z-a)^۲=a^۲$ در مختصات کروی به صورت $\rho=۲a\cos\phi$ است. پس، در مختصات کروی ناحیه‌ی D عبارت است از

$$D^*=\{\,(\rho,\phi,\theta)\ :\ ۰\le\theta\le ۲\,\pi\,,\ ۰\le\phi\le\frac{\pi}{۴}\,,\ ۰\le\rho\le ۲a\cos\phi\,\}$$ (۸نمره)

در نتیجه

$$\iiint_D\left(\frac{۱}{x^۲+y^۲+z^۲}-۳\right)dV = \iiint_{D^*}\left(\frac{۱}{\rho^۲}-۳\right)\rho^۲\sin\phi\,dV$$

$$= \int_۰^{۲\pi}\left[\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\left[\int_۰^{۲a\cos\phi}(۱-۳\rho^۲)d\rho\right]d\phi\right]d\theta = \int_۰^{۲\pi}\left[\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\left(\rho-\rho^۳\Big|_۰^{۲a\cos\phi}\right)\sin\phi\,d\phi\right]d\theta$$

$$= \int_۰^{۲\pi}\left[\int_۰^{\frac{\pi}{۴}}\left(۲a\cos\phi-۸\,a^۳\cos^۳\phi\right)\sin\phi\,d\phi\right]d\theta = \int_۰^{۲\pi}\left(-a\cos^۲\phi+۲a^۳\cos^۴\phi\Big|_۰^{\frac{\pi}{۴}}\right)d\theta$$

$$= \int_۰^{۲\pi}\left[-a\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲+۲a^۳\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۴-(-a+۲a^۳)\right]d\theta = \int_۰^{۲\pi}\left(\frac{a}{۲}-\frac{۳a^۳}{۲}\right)d\theta$$

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

$$= \left(\frac{a}{2} - \frac{3a^3}{2}\right)(2\pi) = \pi(a - 3a^3)$$

(۷ نمره)

$$\boxed{\iiint_D \left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2} - 3\right) dV = \pi a(1 - 3a^2)}$$

پاسخ پرسش ۵.

روش اول) قرار می‌دهیم

$$P(x,y) = 2xf(y) + y^2 g'(x) \quad , \quad Q(x,y) = x^2 f'(y) + 2yg(x)$$

چون f و g توابعی مشتق پذیرند داریم

@jozve_iut

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2xf'(y) + 2yg'(x) \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2xf'(y) + 2yg'(x)$$

بنابر این میدان F یک میدان گرادیان است و در نتیجه انتگرال $\int_C F \cdot dr$ مستقل از مسیر است.

(۵ نمره)

برای محاسبه‌ی انتگرال می‌توان یکی از دو روش زیر را به کار برد.

الف) تابع دو متغیره U را چنان پیدا می کنیم که $\nabla U(x,y) = F(x,y)$ و انتگرال خطی را به صورت زیر محاسبه می کنیم.

$$\int_C \left(2xf(y) + y^2 g'(x)\right) dx + \left(x^2 f'(y) + 2yg(x)\right) dy = U(B) - U(A)$$

در این حالت داریم

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xf(y) + y^2 g'(x) \quad \Rightarrow \quad U(x,y) = x^2 f(y) + y^2 g(x) + h(y)$$

که در آن h یک تابع یک متغیره با مشتق پیوسته است. از سوی دیگر

$$x^2 f'(y) + 2yg(x) + h'(y) = \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 f'(y) + 2yg(x) \quad \Rightarrow \quad h'(y) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad h(y) \equiv c$$

که در آن c یک عدد ثابت است. پس $U(x,y) = x^2 f(y) + y^2 g(x) + c$ و در نتیجه

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

$$\int_C F\cdot dr = U(B)-U(A) = U(۲,\circ)-U(\circ,\circ) = ۴f(\circ)+\circ+c-(\circ+\circ+c) = ۴f(\circ) = ۴$$

(۱۵ نمره)

تذکر: روش دیگر برای محاسبه‌ی U به صورت زیر می‌باشد

$$U(x,y) = \int_\circ^x P(t,\circ)\,dt + \int_\circ^y Q(x,t)\,dt$$

داریم $P(t,\circ) = ۲tf(\circ) = ۲t$ و $Q(x,t) = x^۲f'(t) + ۲tg(x)$. بنابر این

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int_\circ^x P(t,\circ)\,dt + \int_\circ^y Q(x,t)\,dt \\ &= \int_\circ^x ۲t\,dt + \int_\circ^y [x^۲f'(t) + ۲tg(x)]\,dt \\ &= [t^۲]_{t=\circ}^{t=x} + [x^۲f(t) + t^۲g(x)]_{t=\circ}^{t=y} \\ &= x^۲ + (x^۲f(y) + x^۲g(x) - x^۲f(\circ)) = x^۲f(y) + y^۲g(x) + c \end{aligned}$$

@jozve_iut

ب) چون مقدار انتگرال خطی مستقل از مسیر است به جای مسیر C می توان از مسیر C'، پاره خط واصل بین نقطه‌ی A و B استفاده نمود. معادلات پارامتری C' را می‌توان برای $\circ \leq t \leq ۲$ به صورت زیر در نظر گرفت.

$$C' : \begin{cases} x = t \\ y = \circ \end{cases}$$

بنابر این

$$\begin{aligned} \int_C F\cdot dr &= \int_\circ^۲ \Big[(۲tf(\circ)+\circ) + (t^۲f'(\circ)+\circ)(\circ)\Big]\,dt \\ &= f(\circ)\int_\circ^۲ ۲t\,dt = ۴ \end{aligned}$$

(۱۵ نمره)

روش دوم) فرض کنیم C' قسمتی از محور x ها از نقطه‌ی B به نقطه‌ی A است. با استفاده از قضیه‌ی گرین

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + \int_{C'} P\,dx + Q\,dy = \int_{C\cup C'} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\,dA = \circ$$

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

زیرا $\frac{\partial P}{\partial y} = ۲yg'(x) + ۲xf'(y) = \frac{\partial Q}{\partial x}$. (۱۰ نمره)

به این ترتیب

$$\int_C P\ dx + Q\ dy = -\int_{C'} P\ dx + Q\ dy = \int_{-C'} P\ dx + Q\ dy$$

با توجه به اینکه مسیر $-C'$ دارای معادلات پارامتری $x = t$ و $y = ۰$ به ازای $۰ \le t \le ۲$ است خواهیم داشت

$$\int_C P\ dx + Q\ dy = \int_{-C'} P\ dx + Q\ dy = \int_۰^۲ ۲tf(۰)\ dt = ۴$$ (۱۰ نمره)

پاسخ پرسش ۶. فرض کنیم S' قسمتی از صفحه‌ی $z = ۲$ درون S است. از این که مولفه‌های تابع F مشتقات جزئی پیوسته دارند ، با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس برای سطح بسته و قطعه قطعه هموار $S \cup S'$ که ناحیه‌ی T را در فضا محصور می‌کند ، داریم

@jozve_iut

$$\begin{aligned} T &= \{(x,y,z)\ :\ ۰ \le x^۲ + y^۲ \le ۲\ ,\ x^۲ + y^۲ \le z \le ۲\} \\ &= \{(r,\theta,z)\ :\ ۰ \le r \le \sqrt{۲}\ ,\ ۰ \le \theta \le ۲\pi\ ,\ r^۲ \le z \le ۲\} \end{aligned}$$

$$\text{div}\ F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = ۸ + ۲ - ۶ = ۴$$ (۵ نمره)

$$\begin{aligned} \iint_{S \cup S'} F \cdot n\ d\sigma &= \iiint_T \text{div}\ F\ dV = \iiint_T ۴\ dV \\ &= ۴\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\sqrt{۲}}\int_{r^۲}^{۲} r\ dz\ dr\ d\theta \\ &= ۸\pi\int_۰^{\sqrt{۲}} (۲r - r^۳)\ dr \\ &= ۸\pi \end{aligned}$$ (۱۰ نمره)

به این ترتیب

$$\iint_S F \cdot n\ d\sigma = ۸\pi - \iint_{S'} F \cdot n\ d\sigma$$

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

از سوی دیگر برای سطح S' داریم $n = \mathbf{k}$ و S' نمودار تابع ۲ $z = f(x,y) =$ است. در نتیجه

$$\iint_{S'} F\cdot n\,d\sigma = \iint_{S'} -۶z\,d\sigma = -۱۲\iint_{S'} d\sigma = -۱۲\sigma$$

که در آن σ عبارت است از مساحت سطح S' و برابر $\pi(\sqrt{۲})^۲ = ۲\pi$ است. بنابراین

$$\iint_S F\cdot n\,d\sigma = ۸\pi + ۲۴\pi = ۳۲\pi$$ (۵ نمره)

پاسخ پرسش ۷. فرض کنیم S قسمتی از صفحه‌ی π باشد که به وسیله‌ی خم ساده و بسته‌ی γ محصور شده است. از این که مولفه‌های تابع $F(x,y,z) = (bz-cy)\,\mathbf{i} + (cx-az)\,\mathbf{j} + (ay-bx)\,\mathbf{k}$ مشتقات جزئی پیوسته دارند ، با استفاده از قضیه‌ی استوکس برای سطح هموار S با مرز γ و برای n ، بردار یکه‌ی نرمال صفحه‌ی π داریم

@jozve_iut

$$\text{curl } F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ bz-cy & cx-az & ay-bx \end{vmatrix} = (۲a)\,\mathbf{i} + (۲b)\,\mathbf{j} + (۲c)\,\mathbf{k} = ۲n$$

(۷ نمره)

$$\begin{aligned} \int_\gamma F\cdot dr &= \iint_S \text{curl } F\cdot n\,d\sigma \\ &= \iint_S (۲n)\cdot n\,d\sigma \\ &= ۲\iint_S d\sigma \end{aligned}$$

بنابراین (۸ نمره)

$$\iint_S d\sigma = \frac{۱}{۲}\int_\gamma F\cdot dr$$

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

بخش تشریحی آزمون میان ترم ریاضی عمومی II فروردین ماه ۱۳۸۷

۱ـ خم C به معادله‌ی برداری $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} + (e^t \cos t)\mathbf{k}$ مفروض است.

الف) بردارهای $\mathbf{T}$، $\mathbf{N}$ و $\mathbf{B}$ را در نقطه‌ی $C \ni (۱, ۰, ۱)$ به دست آورید.

ب) مرکز انحنا را در نقطه‌ی $C \ni (۱, ۰, ۱)$ به دست آورید.

ب) معادلات پارامتری خم حاصل از تصویر C را بر صفحه‌ی $x - y + ۲z = ۶$ تحت بردار $V = (-۱, ۱, ۰)$ به دست آورید.

(۱۰ نمره)

۲ــ تابع $f(x,y) = \begin{cases} (x-y)\cos(\frac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}) & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید که f در $(۰,۰)$ پیوسته است.

ب) $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)$ را به دست آورید.

@jozve_iut

ج) مشتق سویی f در $(۰,۰)$ و در سوی بردار یکه‌ی $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ را تعیین نمایید.

د) آیا f در $(۰,۰)$ مشتق پذیر است؟ چرا؟

(۱۰ نمره)

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

۱) فرض کنید $f(x,y)=e^{-(x^{2}+y^{2})}$.

(الف) معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر نمودار $z=f(x,y)$ را در نقطه‌ی $P=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{e}\right)$ بیابید.(۵ نمره)

(ب) اکسترممهای $f(x,y)$ را روی ناحیه‌ی $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}\mid(x-1)^{2}+y^{2}\leq 4\}$ به دست آورید.(۲۰ نمره)

---

۲) (الف) مطلوب است محاسبه‌ی

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_{0}^{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}} r\,dr\right]d\theta. \qquad \text{(۵ نمره)}$$

@jozve_iut

ب) گیریم S قسمتی از سطح نیم کره‌ی $z=\sqrt{4-x^{2}-y^{2}}$ است که زیر صفحه‌ی $z=\sqrt{3}$ قرار دارد. در این صورت مساحت S را به کمک انتگرال سطح پیدا کنید.(۱۰ نمره)

---

۳) (الف) مطلوب است محاسبه‌ی

$$\int_{C}(2xy+\cos 2y)dx+(x^{2}-2x\sin 2y+x)dy,$$

که در آن C خط شکسته‌ی حاصل از سه پاره خطی است که به ترتیب از $A=(1,0)$ به $B=(0,1)$ سپس به $C=(-1,0)$ و سرانجام به $D=(0,-1)$ پیموده شده است.(۱۰ نمره)

ب) خم C از تلاقی استوانه‌ی به معادله‌ی $x^{2}+(y-1)^{2}=1$ و سهمی‌گون به معادله‌ی $z=4-x^{2}-y^{2}$ به دست آمده و در جهت مثبت طی شده است. برای تابع برداری $\mathbf{F}(x,y,z)=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}+\mathbf{k}$ مطلوب است محاسبه‌ی $\int_{C}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.(۱۰ نمره)

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

۴) الف) مطلوب است محاسبه‌ی

$$\int\int\int_T (x^2+y^2+z^2)dV$$

که در آن T ناحیه‌ی درون و روی مخروط به معادله‌ی $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و محدود به نیم‌کره‌هایی به معادلات $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ و $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ است.(۱۰ نمره)

ب) اگر S سطح خارجی ناحیه‌ی T در بخش الف) باشد، مطلوب است محاسبه‌ی $\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma$ که در آن $\mathbf{F}(x,y,z)=x(y^2+3)\mathbf{i}+y(z^2-1)\mathbf{j}+z(x^2-1)\mathbf{k}$.(۱۰ نمره)

موفق باشید

@jozve_iut

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

پرسش اول (۲۰ نمره)— خم C با معادلهٔ برداری

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + \sin t - t)\ \mathbf{i} + (\cos t + \sin t + t)\ \mathbf{j} + (2\cos t - \sin t)\ \mathbf{k}$$

را در نظر بگیرید.

الف) انحنای خم C را در نقطهٔ $P_0 = (1, 1, 2)$ بیابید.

ب) معادلهٔ صفحهٔ بوسان را در نقطهٔ P_0 به‌دست آورید.

ج) معادلات پارامتری تصویر قائم خم C را بر صفحهٔ به معادلهٔ $y = x$ مشخص نمایید.

پرسش دوم (۲۰ نمره)— فرض کنید

@jozve_iut

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 & \text{اگر} \quad x^2 + y^2 \geq 1 \\ 1 - x^2 - y^2 & \text{اگر} \quad x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$

الف) به کمک تعریف $(\varepsilon - \delta)$ ثابت کنید که f در $(0, 0)$ پیوسته است.

ب) در مورد وجود $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)$ (با ذکر دلیل) چه می‌توان گفت؟

ج) نمودار $z = f(x, y)$ را توصیف کنید و یک شکل تقریبی برای آن رسم کنید.

موفق باشید

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

۱) الف: فرض کنید تابع $f: D \to \mathbb{R}$ بر $D \subseteq \mathbb{R}^۲$ و توابع $u = u(x,y)$ و $v = v(x,y)$ بر $\mathbb{R}^۲$ دارای مشتقات جزئی پیوسته باشند به قسمی که برای هر $(x,y) \in \mathbb{R}^۲$ داشته باشیم $(u,v) \in D$. برای تابع $g(x,y) = f(u,v)$ نشان دهید $\nabla g = f_u \nabla u + f_v \nabla v$.

(۱۳ نمره)

ب: با فرض $f(u,v) = e^{۲u+v}$، $u = \sin(x+y)$ و $v = \cos(x-y)$ مقادیر a و b را به قسمی تعیین کنید که بردار $\mathbf{w} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ یک بردار یکه باشد و داشته باشیم $D_{\mathbf{w}}\, g(۰,۰) = ۰$.

(۱۲ نمره)

---

۲) الف: با استفاده از تعریف مشتق‌پذیری ثابت کنید که تابع $f(x,y) = x^۲ - y^۲$ در $(۱, -۱)$ مشتق‌پذیر است.

(۱۲ نمره)

@jozve_iut

ب: مطلوب است تعیین اکسترممهای مطلق تابع f بر ناحیهٔ بسته و کراندار $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \mid x^۲ + y^۲ - ۲x - ۳ \leq ۰\}$.

(۱۳ نمره)

---

۳) الف: انتگرال $\iint_D ۴y(x-y^۲)\sin(x^۲ - y^۴)dA$ را حساب کنید که در آن D ناحیهٔ بین سهمی‌های $x - y^۲ = ۰,\ x - y^۲ = ۱,\ x + y^۲ = ۲,\ x + y^۲ = ۳$ واقع در ربع اول صفحه است.

(۱۲ نمره)

ب: مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $\iiint_T \left(\frac{۱}{x^۲ + y^۲ + z^۲} - ۲z\right) dV$ که در آن T ناحیهٔ مشترک درون کرهٔ $x^۲ + y^۲ + (z-۲)^۲ = ۴$ و خارج کرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ است.

(۱۳ نمره)

بقیه‌ی پرسش‌ها را در پشت برگه مشاهده نمایید.

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

۴) الف: هرگاه D ناحیهٔ محصور به خم ساده و بستهٔ γ باشد که در جهت مثبت پیموده شده است، نشان دهید A_D مساحت ناحیهٔ D عبارت است از $A_D = \frac{1}{2}\int_\gamma -ydx + xdy$.

(۱۰ نمره)

ب: برای میدان برداری $F(x,y) = \left(-y + e^{-\sin(x^2)}\right)\mathbf{i} + \left(x + \cosh(y^2 - y^3 + 1)\right)\mathbf{j}$ و خم γ به معادلهٔ $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ که در جهت مثبت پیموده شده است مطلوب است $\int_\gamma F \cdot d\mathbf{r}$.

(۱۵ نمره)

---

۵) فرض کنید $F(x,y,z) = (x+y)\mathbf{i} + (y+2z)\mathbf{j} + (2z+3x)\mathbf{k}$ و S سطح کل کرهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2+z^2 = 4$ باشد. همچنین فرض کنید γ خم ساده و بستهٔ حاصل از تلاقی کره و صفحهٔ $z = 1$ باشد که در جهت مثبت پیموده شده و $\mathbf{n}$ بردار یکهٔ نرمال رو به خارج کره باشد.

الف: مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $\int_\gamma F \cdot d\mathbf{r}$.

(۱۲ نمره)

@jozve_iut

ب: مطلوب است محاسبهٔ انتگرال $\iint_S F \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$.

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

به نام پروردگار یکتا

دانشگاه صنعتی اصفهان   دانشکده‌ی علوم ریاضی

کلید آزمون میان ترم ریاضی عمومی II   فروردین ۱۳۹۰

پرسش اول (۱۲ نمره) خم C را با معادله‌ی برداری زیر در نظر بگیرید.

$$\mathbf{r}(t) = (e^t - t)\ \mathbf{i} + (e^t + t)\ \mathbf{j} + \Big(1 + 2(e^{2t} + t^2)\Big)\ \mathbf{k}$$

الف) معادله‌ی صفحه‌ی بوسان را در نقطه‌ی $P_0 = (1, 1, 3)$ به‌دست آورید.

ب) معادلات پارامتری تصویر قائم خم C را بر صفحه‌ی به معادله‌ی $y - z = 2$ مشخص کنید.

ج) نشان دهید که خم C بر یک رویه‌ی درجه‌ی دو قرار دارد.

حل.

الف)(بارم ۵ نمره)

$$\mathbf{r}'(t) = (e^t - 1)\ \mathbf{i} + (e^t + 1)\ \mathbf{j} + 4\Big(e^{2t} + t\Big)\ \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}''(t) = e^t\ \mathbf{i} + e^t\ \mathbf{j} + 4\Big(2e^{2t} + 1\Big)\ \mathbf{k}$$

@jozve_iut

با توجه به $P_0 = \mathbf{r}(0)$، بردار نرمال صفحه‌ی بوسان در P_0 را می‌توان بردار زیر در نظر گرفت.

$$\mathbf{r}'(0) \times \mathbf{r}''(0) = (2\ \mathbf{j} + 4\ \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + \ \mathbf{j} + 12\ \mathbf{k}) = 20\mathbf{i} + 4\ \mathbf{j} - 2\ \mathbf{k}$$

پس معادله‌ی صفحه‌ی بوسان در P_0 عبارت است از $20(x - 1) + 4(y - 1) - 2(z - 3) = 0$ یا به طور معادل $10x + 2y - z = 9$.

ب) (بارم ۵ نمره) **روش اول:** اگر L_P خط گذرنده از $P = (e^t - t, e^t + t, 1 + 2(e^{2t} + t^2)) \in C$ با بردار هادی $\mathbf{j} - \mathbf{k}$ (بردار نرمال صفحه‌ی $y - z = 2$) باشد. معادله‌ی L_P به شکل زیر است:

$$L_P : \begin{cases} x = e^t - t \\ y = \lambda + e^t + t \\ z = -\lambda + 1 + 2(e^{2t} + t^2) \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

بنابر این نقطه‌ی دلخواه روی C'، تصویر خم C بر صفحه‌ی $\pi :\ y - z = 2$ محل تلاقی خط L_P با صفحه‌ی π است. پس مختصات این نقطه جواب دستگاه زیر است.

$$\begin{cases} x = e^t - t \\ y = \lambda + e^t + t \\ z = -\lambda + 1 + 2(e^{2t} + t^2) \\ y - z = 2 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

از معادله‌ی چهارم یعنی $y-z=۲$ نتیجه می‌شود $\lambda + e^t + t + \lambda - ۱ - ۲(e^{۲t}+t^۲) = ۲$. پس $\lambda = \frac{۱}{۲}(۳ + ۲(e^{۲t}+t^۲) - e^t - t)$. به این ترتیب خم C' را می‌توان نظیر تابع زیر در نظر گرفت:

$$\mathbf{R}(t) = (e^t - t)\mathbf{i} + \frac{۱}{۲}(۳ + ۲(e^{۲t}+t^۲) + e^t + t)\mathbf{j} + \frac{۱}{۲}(-۱ + ۲(e^{۲t}+t^۲) + e^t + t)\ \mathbf{k}$$

روش دوم: نقطه‌ی دلخواهی مانند $Q = (۰,۲,۰)$ را در صفحه‌ی π در نظر می‌گیریم. فرض کنیم نقطه‌ی P' تصویر قائم نقطه‌ی $P \in C$ بر صفحه‌ی π و $\mathbf{n} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$ بردار نرمال π باشد. در این صورت می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{PQ} = (t - e^t)\ \mathbf{i} + (۲ - t - e^t)\ \mathbf{j} + (-۱ - ۲(e^{۲t}+t^۲))\ \mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{PP'} = \mathrm{Proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{PQ} = \frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^۲} = \frac{۱}{۲}(۳ + ۲(e^{۲t}+t^۲) + e^t + t)(\mathbf{i} - \mathbf{k})$$

به این ترتیب خم C' را می‌توان نظیر تابع زیر در نظر گرفت:

$$\mathbf{R}(t) = (e^t - t)\mathbf{i} + \frac{۱}{۲}(۳ + ۲(e^{۲t}+t^۲) + e^t + t)\mathbf{j} + \frac{۱}{۲}(-۱ + ۲(e^{۲t}+t^۲) + e^t + t)\ \mathbf{k}$$

ج) (بارم ۲ نمره) برای $P = (x,y,z) \in C$ داریم:

$$x = x(t) = e^t - t, \quad y = y(t) = e^t + t, \quad z = z(t) = ۱ + ۲(e^{۲t}+t^۲)$$

با توجه به این که $x^۲ + y^۲ + ۱ = z$، نتیجه می‌گیریم C بر یک رویه‌ی درجه دو (سهمی‌گون دوار) قرار دارد.

@jozve_iut

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

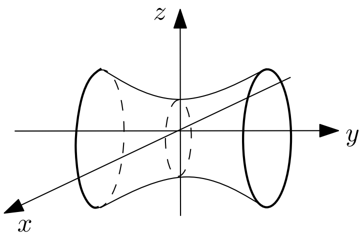
پرسش دوم (۱۰ نمره) رویه‌ی S به معادله‌ی $x^۲ - y^۲ + z^۲ = ۱$ مفروض است.

الف) این رویه را توصیف و نمودار آن را رسم کنید.

ب) نشان دهید دقیقاً دو خط راست از نقطه‌ی $(۱, ۱, ۱)$ می گذرند که تماماً بر رویه‌ی فوق قرار دارند.

ج) معادلات پارامتری خم حاصل از تلاقی S را با صفحه‌ی $x = ۲y$ به دست آورید.

حل. الف)(بارم ۳ نمره) مقطع S با صفحات $y = k$ برای هر k یک دایره و با صفحات $x = k$ و $z = k$ هذلولی است. سطح S یک هذلولی‌گون یک‌پارچه‌ی دوار در امتداد محور y است.



ب) (بارم ۴ نمره) فرض کنیم $L_۰ \subseteq S$ خط با بردارهادی $\mathbf{v} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j} + c\,\mathbf{k}$ و گذرنده از $P_۰ = (۱, ۱, ۱)$ باشد. معادله‌ی $L_۰$ به شکل زیر است:

@jozve_iut

$$L_۰ : \begin{cases} x = at + ۱ \\ y = bt + ۱ \\ z = ct + ۱ \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

به این ترتیب:

$$\begin{aligned} L_۰ \subseteq S \quad & \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R} \ \ (at+۱)^۲ - (bt+۱)^۲ + (ct+۱)^۲ = ۱ \\ & \Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{R} \ \ (a^۲ - b^۲ + c^۲)t^۲ + ۲(a - b + c)t = ۰ \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^۲ - b^۲ + c^۲ = ۰ \\ ۲(a - b + c) = ۰ \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^۲ + c^۲ = b^۲ \\ a + c = b \end{cases} \end{aligned}$$

از معادله‌ی دوم داریم $a^۲ + c^۲ + ۲ac = b^۲$ و در نتیجه بنابر معادله‌ی اول $ac = ۰$. پس این دستگاه دو جواب $a = ۰, b = c$ و $c = ۰, a = b$ دارد. به این ترتیب $\mathbf{v}_۱ = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{v}_۲ = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ بردارهای هادی دو خط مورد نظر هستند.

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

ج)(بارم۳ نمره) مختصات نقطه‌ی تلاقی S با صفحه‌ی $\pi\ :\ \ x = ۲y$ در دستگاه زیر صدق می‌کنند.

$$\begin{cases} x^۲ - y^۲ + z^۲ = ۱ \\ x = ۲y \end{cases}$$

از این دستگاه نتیجه می‌شود $۳y^۲ + z^۲ = ۱$. معادله‌ی پارامتری خم حاصل به شکل زیر است:

$$\begin{cases} x = \dfrac{۲\sqrt{۳}}{۳}\cos t \\ y = \dfrac{\sqrt{۳}}{۳}\cos t \\ z = \sin t \end{cases}$$

@jozve_iut

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

پرسش سوم (۸ نمره) تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\sin x}{x^2+|y|} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید که تابع f در $(0,0)$ پیوسته است.

ب) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ را در $(0,0)$ محاسبه کنید.

حل. الف) (بارم ۴ نمره) باید نشان دهیم:

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\,(\sqrt{x^2+y^2}<\delta\Rightarrow|\frac{x^2\sin x}{x^2+|y|}-0|<\varepsilon)$$

با توجه به نامساوی‌های $\dfrac{x^2}{x^2+|y|}\leq 1$ و $|\sin x|\leq|x|$ داریم:

$$|\frac{x^2\sin x}{x^2+|y|}|\leq|x|\frac{x^2}{x^2+|y|}\leq|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}$$

@jozve_iut

پس برای $\varepsilon>0$ کافی است قرار دهیم $\delta\leq\varepsilon$.

ب) (بارم هرقسمت ۲ نمره)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2\sin h}{h^2+0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

به نام خالق یکتا

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده‌ی علوم ریاضی

آزمون میان‌ترم ریاضی عمومی ۲ فروردین‌ماه ۱۳۹۱ مدت آزمون: ۹۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی .... شماره دانشجویی .... مدرس..............

---

۱) خم C به معادله‌ی برداری $\mathbf{r}(t) = (2e^t \cos t)\mathbf{i} + (2e^t \sin t)\mathbf{j} - e^{2t}\mathbf{k}$ مفروض است.

الف) معادله‌ی صفحه‌ی بوسان خم C را در نقطه‌ی $P_0 = (2, 0, -1)$ بیابید. (۱۰ نمره)

ب) خمیدگی (انحنای) خم C را در نقطه‌ی $P_0 = (2, 0, -1)$ محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

ج) نشان دهید خم C بر یک رویه‌ی درجه‌ی دوم قرار دارد. معادله‌ی این رویه را به‌دست آورید، اسم رویه را بیان کنید و نمودار آن را رسم کنید. (۱۰ نمره)

---

۲) تابع حقیقی $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر بگیرید:

@jozve_iut

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \sin x + y^3 \sin y}{x^2 + y^2} & (x,y) = (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

الف) پیوستگی f را در $(0,0)$ بررسی کنید. (۱۰ نمره)

ب) مقادیر $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

ج) مشتق پذیری f را در $(0,0)$ بررسی کنید.(۱۰ نمره)

موفق باشید

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

دانشکده علوم ریاضی — دانشگاه صنعتی اصفهان

فروردین ۹۲ | امتحان میان‌ترم درس ریاضی عمومی ۲ | مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

لطفا توجه کنید

۱— نام، شماره دانشجویی و نام مدرس خود را در بالای تمام صفحات پاسخ‌نامه بنویسید.
۲— از جدا کردن صفحات پاسخ‌نامه جدا خودداری کنید.
۳— در طول امتحان به هیچ سئوالی پاسخ داده نمی‌شود.
۳— استفاده از موبایل در طول مدت امتحان ممنوع است. لطفاً دستگاه‌های خود را در این مدت خاموش نگه دارید.

۱— تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2-y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید که f در $(0,0)$ پیوسته است.

ب) مطلوبست تعیین مشتق سویی تابع f در نقطه‌ی $(0,0)$ و در سوی بردار یکه‌ی $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$.

ج) نشان دهید که f در نقطه‌ی $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست.

د) مطلوبست تعیین معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی S به معادله‌ی $z=f(x,y)$ در نقطه‌ی $(1,0,0)$.

(۲۰ نمره)

@jozve_iut

۲— فرض کنید $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم پیوسته باشد. اگر $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $g(x,y)=f(x+y,x^2-y)$ داده شده باشد، مطلوبست محاسبه‌ی $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}$ بر حسب مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول و مرتبه‌ی دوم f. (۸ نمره)

۳— تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=xye^{-(x+y)}$ مفروض است. اکسترمم‌های نسبی و نقاط زینی f را در صورت وجود مشخص کنید. (۱۲ نمره)

موفق باشید

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

پاسخ مسائل امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۲— فروردین ۹۲

۱— تابع $f:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^{۲}-y^{۳}}{x^{۲}+y^{۲}} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید که f در $(۰,۰)$ پیوسته است.

ب) مطلوبست تعیین مشتق سویی تابع f در نقطه‌ی $(۰,۰)$ و در سوی بردار یکه‌ی $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$.

ج) نشان دهید که f در نقطه‌ی $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر نیست.

د) مطلوبست تعیین معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی S به معادله‌ی $z=f(x,y)$ در نقطه‌ی $(۱,۰,۰)$.

حل.

الف) باید نشان دهیم که برای $\epsilon>۰$ عدد $\delta>۰$ وجود دارد که

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^{۲},\qquad \sqrt{x^{۲}+y^{۲}}<\delta\ \Rightarrow\ |f(x,y)-f(۰,۰)|<\epsilon$$

با توجه به اینکه

$$|f(x,y)-f(۰,۰)|=\frac{|xy^{۲}-y^{۳}|}{x^{۲}+y^{۲}}\leq\frac{y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}|x|+\frac{y^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}}|y|\leq|x|+|y|\leq ۲\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$$

برای داشتن $|f(x,y)-f(۰,۰)|<\epsilon$، کافی است $۲\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}<\epsilon$. برای این منظور $\delta>۰$ را کوچکتر یا مساوی $\frac{\epsilon}{۲}$ انتخاب می‌کنیم. (۵ نمره)

ب) با توجه به تعریف مشتق سویی

$$D_uf(۰,۰)=\lim_{t\to۰}\frac{f(ta,tb)-f(۰,۰)}{t}=\lim_{t\to۰}\frac{\frac{t^{۳}ab^{۲}-t^{۳}b^{۳}}{t^{۲}a^{۲}+t^{۲}b^{۲}}-۰}{t}=\frac{ab^{۲}-b^{۳}}{a^{۲}+b^{۲}}=ab^{۲}-b^{۳}$$

(۵ نمره)

ج) اگر f در نقطه‌ی $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه برای هر بردار یکه‌ی $\mathbf{u}$، $D_uf(۰,۰)=\nabla f(۰,۰)\cdot\mathbf{u}$. عبارت $D_uf(۰,۰)$ را در قسمت قبل حساب کردیم. اکنون به محاسبه‌ی $\nabla f(۰,۰)\cdot\mathbf{u}$ می‌پردازیم. بنابر قسمت قبل، با انتخاب $\mathbf{u}=\mathbf{i}$ و $\mathbf{u}=\mathbf{j}$ خواهیم داشت

$$\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)=D_if(۰,۰)=۰\quad,\quad\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)=D_jf(۰,۰)=-۱$$

در نتیجه $\nabla f(۰,۰)\cdot\mathbf{u}=-b$. با توجه به اینکه تساوی $D_uf(۰,۰)=\nabla f(۰,۰)\cdot\mathbf{u}$ برای هر بردار یکه‌ی $\mathbf{u}$ لزوما برقرار نیست (به طور مثال، برای $\mathbf{u}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\mathbf{i}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}\mathbf{j}$، داریم $D_uf(۰,۰)=۰\neq-\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\nabla f(۰,۰)\cdot\mathbf{u}$) پس f در $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر نیست.

(راه حل دوم: استفاده از تعریف مشتق‌پذیری) (۵ نمره)

@jozve_iut
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

د) با معرفی تابع سه متغیره‌ی g با ضابطه‌ی $g(x,y,z)=f(x,y)-z$، رویه‌ی S رویه‌ی تراز تابع g به ازای ثابت صفر بوده، بردار $\nabla g(۱,۰,۰)$ بردار نرمال صفحه‌ی مماس بر این رویه در نقطه‌ی $(۱,۰,۰)$ خواهد بود.
با توجه به اینکه

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y^۴-x^۲y^۲+۲xy^۳}{(x^۲+y^۲)^۲}\ ,\ \frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{۲xy^۳-۳x^۲y^۲-y^۴}{(x^۲+y^۲)^۲}\ ,\ \frac{\partial g}{\partial z}=-۱$$

داریم $\nabla g(۱,۰,۰)=-\mathbf{k}$. به این ترتیب، صفحه‌ی مماس بر S در نقطه‌ی $(۱,۰,۰)$ دارای معادله‌ی $-z=۰$ یا $z=۰$ بوده، که همان صفحه‌ی xoy است. (۵ نمره)

۲— فرض کنید $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم پیوسته باشد. اگر $g:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $g(x,y)=f(x+y,x^۲-y)$ داده شده باشد، مطلوبست محاسبه‌ی $\frac{\partial g}{\partial x}$ و $\frac{\partial^۲ g}{\partial y\partial x}$ بر حسب مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول و مرتبه‌ی دوم f.

حل. با قرار دادن $u(x,y)=x+y$ و $v(x,y)=x^۲-y$، خواهیم داشت $g(x,y)=f(u(x,y),v(x,y))$. با توجه به شرایط داده شده می‌توانیم از قاعده‌ی زنجیره‌ای استفاده کنیم.

@jozve_iut

$$\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y),v(x,y))+۲x\frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))$$

(۳ نمره)

به این ترتیب، با استفاده مجدد از قاعده‌ی زنجیره‌ای

$$\begin{aligned}\frac{\partial^۲ g}{\partial y\partial x}&=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\\&=(\frac{\partial^۲ f}{\partial u^۲}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^۲ f}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial y})+۲x(\frac{\partial^۲ f}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^۲ f}{\partial v^۲}\frac{\partial v}{\partial y})\\&=\frac{\partial^۲ f}{\partial u^۲}-\frac{\partial^۲ f}{\partial u\partial v}+۲x\frac{\partial^۲ f}{\partial u\partial v}-۲x\frac{\partial^۲ f}{\partial v^۲}\\&=\frac{\partial^۲ f}{\partial u^۲}+(۲x-۱)\frac{\partial^۲ f}{\partial u\partial v}-۲x\frac{\partial^۲ f}{\partial v^۲}\end{aligned}$$

(۵ نمره)

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

۳— تابع $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=xye^{-(x+y)}$ مفروض است. اکسترمم‌های نسبی و نقاط زینی f را در صورت وجود مشخص کنید.

حل. ابتدا نقاط بحرانی f را بر $\mathbb{R}^۲$ به دست می‌آوریم. با توجه به اینکه f تابعی مشتق‌پذیر است، نقاط بحرانی این تابع جواب‌های معادلات $\frac{\partial f}{\partial x}=۰$ و $\frac{\partial f}{\partial y}=۰$ خواهند بود.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= ye^{-(x+y)}-xye^{(x+y)}=y(۱-x)e^{-(x+y)}=۰ \qquad (۱)\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= xe^{-(x+y)}-xye^{(x+y)}=x(۱-y)e^{-(x+y)}=۰ \qquad (۲)\end{aligned}$$

با استفاده از معادله‌ی (۱)، داریم $y=۰$ یا $x=۱$. در حالت $y=۰$ با استفاده از معادله‌ی (۲) خواهیم داشت $x=۰$. به همین ترتیب، اگر $x=۱$ آنگاه با استفاده از (۲)، $y=۱$. پس f بر $\mathbb{R}^۲$ دارای دو نقطه‌ی بحرانی $P_۱=(۰,۰)$ و $P_۲=(۱,۱)$ است. (۴ نمره)

اکنون برای ادامه‌ی مسئله از آزمون مشتق دوم استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲} &= -ye^{-(x+y)}-y(۱-x)e^{-(x+y)}\\ \frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y} &= (۱-x)e^{-(x+y)}-y(۱-x)e^{-(x+y)}\\ \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲} &= -xe^{-(x+y)}-x(۱-y)e^{-(x+y)}\end{aligned}$$

@jozve_iut

در نتیجه

$$A_۱=\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(۰,۰)=۰\quad,\quad B_۱=\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(۰,۰)=۱\quad,\quad C_۱=\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(۰,۰)=۰$$

$$D_۱=A_۱C_۱-B_۱^۲=-۱<۰$$

پس $P_۱$ یک نقطه‌ی زینی برای f است. به همین ترتیب،

$$A_۲=\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(۱,۱)=-e^{-۲}\quad,\quad B_۲=\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(۱,۱)=۰\quad,\quad C_۲=\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(۱,۱)=-e^{-۲}$$

$$D_۲=A_۲C_۲-B_۲^۲=e^{-۴}>۰$$

با توجه به اینکه $A_۲<۰$، نقطه‌ی $P_۲$ نظیر ماکزیمم نسبی تابع f است. (۸ نمره)

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

آزمون میان ترم درس ریاضی عمومی ۲

۱۳۹۳/۱/۲۱ مدت آزمون: ۲ ساعت

توجه: برگه های دفترچه‌ی پاسخ نامه را بترتیب شماره‌گذاری کرده و پاسخ هر پرسش را در برگهٔ مخصوص خود بنویسید. بارم پرسش‌های ۱ و ۴ هر کدام ۸ و پرسش‌های ۲ و ۳ هر کدام ۱۲ نمره است.

---

۱. فرض کنید رویه‌ی S در فضا توسط معادله‌ی $(x-z)+\sin(y-z)=1$ مشخص شده باشد. نشان دهید که کلیه‌ی صفحات مماس بر S بر صفحه به معادله‌ی $x+y+z=0$ عمود هستند.

۲. تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+2y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ مفروض است.

الف) مطلوبست محاسبه‌ی $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

ب) با استفاده از تعریف نشان دهید که f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر است.

@jozve_iut

۳. فرض کنید تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\ \sin x}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید f در نقطه‌ی $(0,0)$ پیوسته است.

ب) برای بردار یکه‌ی $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$، مطلوب است محاسبه‌ی مشتق سویی f در $(0,0)$ در سوی $\mathbf{u}$، یعنی $D_{\mathbf{u}}f(0,0)$.

ج) مقدار $\nabla f(0,0)\cdot\mathbf{u}$ را به دست آورید. از دو قسمت (ب) و (ج) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴. فرض کنید $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع مشتق پذیر و z تابعی مشتق پذیر بر حسب x و y باشد که بطور ضمنی در معادله‌ی $f(e^{(x+z)},y+z)=0$ صدق می‌کند. ثابت کنید

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-1$$

.

«موفق باشید»

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

پاسخ پرسش ۱ ریاضی عمومی ۲ فروردین ماه ۱۳۹۳

سئوال ۱:

$F(x,y,z) = x - z + \sin(y-z) - 13$ (1)

$F_x = 1,\ F_y = \cos(y-z),\ F_z = -1 - \cos(y-z)$ (3)

$\nabla F = i + \cos(y-z)j - (1+\cos(y-z))k$ (1) ، $N = i + j + k$ (1)

$\nabla F \cdot N = 1 + \cos(y-z) - 1 - \cos(y-z) = 0$

(2)

پاسخ پرسش 2 ریاضی عمومی ۲ فروردین ماه ۱۳۹۳

سئوال 2:

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$ (2)

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{2y^2}{y} = 0$ (2)

$$\Delta f = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = \begin{cases} \frac{\Delta x^4 + 2\Delta y^4}{\Delta x^2 + \Delta y^2} & \text{if } (\Delta x, \Delta y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (\Delta x, \Delta y) = (0,0) \end{cases}$$ (1)

با فرض $\alpha(\Delta x, \Delta y) = \frac{\Delta x^3}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ (2) و $\beta(\Delta x, \Delta y) = \frac{2\Delta y^3}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ (1) (داریم)

$\Delta f = 0\Delta x + 0\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y$ (1)

و $\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \alpha(\Delta x, \Delta y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \beta(\Delta x, \Delta y) = 0$ (2)

پس f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر است.

@jozve_iut

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

پاسخ پرسش ۳ ریاضی عمومی ۲ ، ۱۶ فروردین ۱۳۹۳

۳. الف) ط ۰ در (۰،۰)

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \left|\frac{xy\sin x}{x^2+y^2}-0\right| \le \frac{|x|\,|y|\,|\sin x|}{x^2+y^2} \le \frac{(\sqrt{x^2+y^2})(\sqrt{x^2+y^2})(\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}$$

$$=\sqrt{x^2+y^2} \overset{(?)}{<} \varepsilon$$

کافیست $\delta \le \varepsilon$ اختیار شود. (۴ نمره)

ب)

$$D_u f(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(at,bt)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{abt^2\sin(at)}{(a^2+b^2)t^2}}{t}$$

(۴ نمره)

$$=\lim_{t\to 0} ab\,\frac{\sin(at)}{t} = a^2b$$

ج)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0 \Rightarrow \nabla f(0,0)\cdot \vec{u}=0$$

نتیجه: اگر این تناقض در $\vec{u}$ ، ب و $D_u f(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot u$ برقرار است پس f در (۰،۰) نقطه مشتق‌پذیر نمی‌باشد. (۴ نمره)

پاسخ پرسش ۴ ریاضی عمومی ۲ ، ۱۶ فروردین ۱۳۹۳

۴. با فرض تابع مشتق‌پذیر $z=z(x,y)$ وجود داشته باشد داریم (x,y)

$$f\left(e^{x+z(x,y)},\ y+z(x,y)\right)=0$$

قرار می‌دهیم $u(x,y)=e^{x+z(x,y)}$ و $v(x,y)=y+z(x,y)$ ، بنابراین داریم (x,y)

$$f(u(x,y),v(x,y))=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(f(u(x,y),v(x,y))\right)=0\ ,\ \frac{\partial}{\partial y}\left(f(u(x,y),v(x,y))\right)=0$$

$$\Rightarrow f_u\frac{\partial u}{\partial x}+f_v\frac{\partial v}{\partial x}=0\ ,\ f_u\frac{\partial u}{\partial y}+f_v\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\Rightarrow f_u\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)e^{x+z(x,y)} + f_v\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{[illegible]} \frac{\partial z}{\partial x} \text{[illegible]} \frac{\text{[illegible]}}{uf_u+f_v}$$

@jozve_iut

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

ادامه‌ی پرسش ۴ ریاضی عمومی ۲ فروردین ۱۳۹۴

و $\frac{\partial z}{\partial y} e^{(x+z(x,y))} f_u + \left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right) f_v = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-f_v}{u f_u + f_v}$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-u f_u}{u f_u + f_v} + \frac{-f_v}{u f_u + f_v} = -1$$

(۸ نمره)

@jozve_iut

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

باسمه تعالی

پاسخ سوالات امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۲

نیمسال اول ۹۵-۹۴

۱. فرض کنید $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+y)\sin(x^۲-y^۲)}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$.

الف) نشان دهید f در مبداء پیوسته است. (۳ نمره)

ب) مقدار $\dfrac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)$ را بیابید. (۳ نمره)

ج) اگر $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ یک بردار یکانی باشد (یعنی $a^۲+b^۲=۱$)، مطلوبست محاسبه مقدار $D_{\mathbf{u}}f(۰,۰)$ (مشتق سویی از f در نقطه $(۰,۰)$ و در سوی $\mathbf{u}$) و مقدار $\nabla f(۰,۰).\mathbf{u}$. (۳ نمره)

د) ثابت کنید f در $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر نیست (می‌توانید از قسمت (ج) استفاده کنید). (۳ نمره)

پاسخ الف. راه اول. فرض کنید $\epsilon>۰$ داده شده است. با توجه به اینکه $|\sin a|\leq|a|$ داریم

$$|f(x,y)-f(۰,۰)|\leq\left|\frac{(x+y)\sin(x^۲-y^۲)}{x^۲+y^۲}\right|\leq\frac{|x+y||x^۲-y^۲|}{x^۲+y^۲}\leq|x+y|\frac{x^۲+y^۲}{x^۲+y^۲}$$
$$\leq|x|+|y|\leq ۲\sqrt{x^۲+y^۲}.$$

@jozve_iut

با قرار دادن $\delta=\epsilon/۲$، داریم

$$\sqrt{x^۲+y^۲}\leq\delta\quad\Rightarrow\quad|f(x,y)-f(۰,۰)|\leq ۲\delta=\epsilon.$$

بنابراین f در مبدا پیوسته است.

راه دوم. با توجه به اینکه $|\sin a|\leq|a|$ داریم

$$\left|\frac{\sin(x^۲-y^۲)}{x^۲+y^۲}\right|\leq\frac{|x^۲-y^۲|}{x^۲+y^۲}\leq\frac{x^۲+y^۲}{x^۲+y^۲}=۱.$$

با توجه به اینکه $\dfrac{\sin(x^۲-y^۲)}{x^۲+y^۲}$ کران‌دار است و $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)}(x+y)=۰$، بنابراین طبق قضیه $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)}f(x,y)=۰=f(۰,۰)$. پس f در مبدا پیوسته است.

پاسخ ب.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)=\lim_{h\to۰}\frac{f(h,۰)-f(۰,۰)}{h}=\lim_{h\to۰}\frac{\frac{h\sin(h^۲)}{h^۲}-۰}{h}=\lim_{h\to۰}\frac{\sin h^۲}{h^۲}=۱.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)=\lim_{h\to۰}\frac{f(۰,h)-f(۰,۰)}{h}=\lim_{h\to۰}\frac{\frac{h\sin(-h^۲)}{h^۲}-۰}{h}=\lim_{h\to۰}\frac{-\sin h^۲}{h^۲}=-۱.$$

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

پاسخ ج. طبق قسمت ب داریم $\nabla f(0,0)=(1,-1)$. بنابراین $\nabla f(0,0).\mathbf{u}=a-b$. از طرفی

$$D_{\mathbf{u}}f(0,0)=\lim_{t\to 0}=\frac{f(at,bt)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{(a+b)t\sin((a^2-b^2)t^2)}{(a^2+b^2)t^2}-0}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{(a+b)\sin((a^2-b^2)t^2)}{t^2}=(a+b)(a^2-b^2).$$

پاسخ د. اگر f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه برای هر بردار یکانی $D_{\mathbf{u}}f(0,0)=\nabla f(0,0).\mathbf{u}$. اما به ازای بردار $\mathbf{u}=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ داریم

$$D_{\mathbf{u}}f(0,0)=-\frac{49}{125},\quad \nabla f(0,0).\mathbf{u}=-\frac{1}{5}.$$

پس f در مبدا مشتق‌پذیر نیست.

---

۲. فرض کنید رویه S_1 به معادله $z=2x^2-4x-3y^2+6$ و رویه S_2 به معادله $e^{x^2y}-z-(y-1)z^2=e-1$ داده شده است.

الف) رویه S_1 را توصیف نمایید و نوع آن را تعیین کنید. (۲ نمره)

ب) ثابت کنید که از نقطه $(1,1,1)$ واقع بر رویه S_1 دو خط راست متقاطع می‌گذرند که تماماً بر رویه S_1 قرار دارند. معادلات این دو خط را بنویسید. (۵ نمره)

ج) معادله خط مماس در نقطه $(1,1,1)$ بر خم C که از تلاقی دو رویه S_1 و S_2 حاصل می‌شود را بنویسید. (۶ نمره)

@jozve_iut

پاسخ الف. ابتدا رویه S_1 بصورت استاندارد می‌نویسیم:

$$z=2(x-1)^2-3y^2+4.$$

تلاقی رویه با صفحه $z=c$ هذلولی $(x-1)^2-3y^2=c-4$ است. تلاقی رویه با صفحه $x=c$، سهمی $z=-3y^2+2(c-1)^2+4$ با سر رو به پایین است و تلاقی رویه با صفحه $y=c$، سهمی $z=2(x-1)^2-3c^2+4$ با سر رو به بالا است. بنابراین نوع رویه سهمی گون هذلولوی (یا زین اسبی) است.

پاسخ ب. معادله خط راست با بردار هادی (a,b,c) که از نقطه $(1,1,1)$ می‌گذرد به صورت زیر است.

$$x(t)=at+1,\quad y(t)=bt+1,\quad z(t)=ct+1.$$

برای اینکه خط تماماً روی رویه S_1 قرار گیرد، باید نقطه $(x(t),y(t),z(t))$ به ازای هر t در رویه صدق کند. پس

$$\forall t,\quad ct+1=2(at+1)^2-4(at+1)-3(bt+1)^2+6.$$

با ساده کردن داریم

$$\forall t,\quad (2a^2-3b^2)t^2-(6b+c)t=0.$$

بنابراین ضریب t^2 و ضریب t برابر صفر است.

$$6b+c=0, 2a^2-3b^2=0.$$

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

یعنی

$$c=-6b, a=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}b.$$

پس بردار هادی خط بصورت $(\frac{\sqrt{6}}{2},1,-6)$ یا $(a,b,c)=(\frac{\sqrt{6}}{2},1,-6)$ $(a,b,c)=(-\frac{\sqrt{6}}{2},1,-6)$ است که دو خط زیر را بدست می‌دهد.

$$l_1: \quad x(t)=\frac{\sqrt{6}}{2}t+1, \quad y(t)=t+1, \quad z(t)=-6t+1.$$

$$l_2: \quad x(t)=-\frac{\sqrt{6}}{2}t+1, \quad y(t)=t+1, \quad z(t)=-6t+1.$$

پاسخ ج. بردار نرمال صفحات مماس بر رویه‌ها در نقطه $(1,1,1)$ بر خم C عمودند. بنابراین بردار هادی خط مماس بر خم C در این نقطه در راستای $n_1\times n_2$ است که n_i بردار نرمال صفحه مماس بر رویه S_i در نقطه $(1,1,1)$ است. اما رویه S_1 دارای معادله $f(x,y,z)=2x^2-4x-3y^2+6-z=0$ و رویه S_2 دارای معادله $g(x,y,z)=e^{x^2y}-z-(y-1)z^2-e+1=0$ است. پس

$$\nabla f=(4x-4,-6y,-1), \quad \nabla g=(2xye^{x^2y}, x^2e^{x^2y}-z^2, -1-2(y-1)z).$$

$$n_1=\nabla f(1,1,1)=(0,-6,-1), \quad n_2=\nabla g(1,1,1)=(2e,e-1,-1).$$

لذا بردار هادی خط مماس از رابطه زیر بدست می‌آید

$$n_1\times n_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & -6 & -1\\ 2e & e-1 & -1\end{vmatrix}=(6-e+1)\mathbf{i}-2e\mathbf{j}+12e\mathbf{k}.$$

@jozve_iut

چون خط مماس از نقطه $(1,1,1)$ می‌گذرد، معادله خط مماس بصورت زیر است.

$$x(t)=(7-e)t+1, \quad y(t)=-2et+1, \quad z(t)=12et+1.$$

---

۳. فرض کنید g تابعی سه متغیره و مشتق‌پذیر باشد و z تابعی برحسب x و y باشد که در رابطه ضمنی $g(zx^2+e^{xy}, x^2y+\ln z, 2x+z^2)=0$ صدق می‌کند و داریم $z(0,0)=1$.

الف) مطلوبست تعیین $\frac{\partial z}{\partial x}$ برحسب مشتقات جزیی g. (۴ نمره)

ب) اگر $\nabla g(1,0,1)=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$، مطلوبست محاسبه $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$. (۱ نمره)

پاسخ الف. **راه اول.** قرار می‌دهیم $u(x,y)=zx^2+e^{xy}$، $v(x,y)=x^2y+\ln z$ و $w(x,y)=2x+z^2$. همچنین قرار می‌دهیم $f(x,y)=g(u,v,w)=0$. با مشتق‌گیری برحسب x و استفاده از قاعده زنجیری داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}\\ &=\frac{\partial g}{\partial u}(\frac{\partial z}{\partial x}x^2+2xz+ye^{xy})+\frac{\partial g}{\partial v}(2xy+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x})+\frac{\partial g}{\partial w}(2+2\frac{\partial z}{\partial x}z)=0.\end{aligned}$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

با حل برحسب $\frac{\partial z}{\partial x}$ داریم

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{(-2xz-ye^{xy})\frac{\partial g}{\partial u}-2xy\frac{\partial g}{\partial v}-2\frac{\partial g}{\partial w}}{x^2\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{1}{z}\frac{\partial g}{\partial v}+2z\frac{\partial g}{\partial w}}. \qquad (1)$$

راه دوم. قرار می‌دهیم $u(x,y)=zx^2+e^{xy}$، $v(x,y)=x^2y+\ln z$ و $w(x,y)=2x+z^2$. همچنین قرار می‌دهیم $F(x,y,z)=g(u,v,w)$. با توجه به فرمول مشتق ضمنی و قاعده زنجیری داریم

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}}=\frac{(-2xz-ye^{xy})\frac{\partial g}{\partial u}-2xy\frac{\partial g}{\partial v}-2\frac{\partial g}{\partial w}}{x^2\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{1}{z}\frac{\partial g}{\partial v}+2z\frac{\partial g}{\partial w}}.$$

پاسخ ب. با قرار دادن $x=0, y=0, z=1$ و $\frac{\partial g}{\partial u}=4$، $\frac{\partial g}{\partial v}=3$ و $\frac{\partial g}{\partial w}=-1$ در رابطه (۱) داریم

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=\frac{0+0+2}{0+3-2}=2.$$

موفق باشید

@jozve_iut

پاسخ پرسش‌های آزمون میان‌ترم ریاضی عمومی ۲، ترم دوم سال تحصیلی ۹۵-۹۴

۱. تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2\sin y+y^2\sin x}{x^2+y^2+|x|\,|y|} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ مفروض است.

الف) نشان دهید f در $(0,0)$ پیوسته است.

ب) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ را بیابید.

ج) وجود مشتق سویی f در مبدا مختصات و در سوی بردار یکه‌ی $\mathbf{u}=\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$ را بررسی کنید.

د) با محاسبه‌ی $\nabla f(0,0)\cdot\mathbf{u}$، مشتق‌پذیری f در $(0,0)$ را با ذکر دلیل بررسی کنید. (۳۰ نمره)

حل. الف) نشان می‌دهیم $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$. به عبارت دیگر نشان می‌دهیم برای $\epsilon>0$، عدد $\delta>0$ وجود دارد که

@jozve_iut

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \|(x,y)-(0,0)\|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta\ \Rightarrow\ |f(x,y)-f(0,0)|<\epsilon$$

با توجه به اینکه برای هر $(x,y)\neq(0,0)$ داریم

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\frac{x^2\sin y+y^2\sin x}{x^2+y^2+|x||y|}\right| &\leq \frac{x^2}{x^2+y^2+|x||y|}|\sin y|+\frac{y^2}{x^2+y^2+|x||y|}|\sin x|\\ &\leq |\sin y|+|\sin x|\leq|y|+|x|\leq 2\sqrt{x^2+y^2}\end{aligned}$$

کافی است برای $\epsilon>0$، عدد $\delta>0$ را با شرط $\delta\leq\frac{\epsilon}{2}$ اختیار کنیم. در این صورت صحت استلزام فوق به راحتی تحقق می‌گردد.

پس f در $(0,0)$ پیوسته است.

ب) با استفاده از تعریف مشتقات جزئی،

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{0}{x^2}-0}{x}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{\frac{0}{y^2}-0}{y}=0\end{aligned}$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

ج) مشتق سویی f در مبدا و در سوی برای یکه‌ی $\mathbf{u}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\mathbf{j}$، بنابه تعریف، عبارت است از

$$\begin{aligned} D_u f(۰,۰) &= \lim_{t\to ۰}\frac{f(۰+t\frac{\sqrt{۲}}{۲},۰+t\frac{\sqrt{۲}}{۲})-f(۰,۰)}{t} \\ &= \lim_{t\to ۰}\frac{\dfrac{\frac{t^۲}{۲}\sin(t\frac{\sqrt{۲}}{۲})+\frac{t^۲}{۲}\sin(t\frac{\sqrt{۲}}{۲})}{\frac{t^۲}{۲}+\frac{t^۲}{۲}+|t\frac{\sqrt{۲}}{۲}||t\frac{\sqrt{۲}}{۲}|}}{t} \\ &= \lim_{t\to ۰}\frac{\frac{۲}{۳}\sin(\frac{\sqrt{۲}}{۲}t)}{t}=\frac{\sqrt{۲}}{۳} \end{aligned}$$

د) با توجه به محاسبات قسمت (ب)، $\nabla f(۰,۰)=۰\mathbf{i}+۰\mathbf{j}$ و در نتیجه $\nabla f(۰,۰)\cdot\mathbf{u}=۰$. با توجه به قسمت (ج)،

$$D_u f(۰,۰)\neq\nabla f(۰,۰)\cdot\mathbf{u}$$

در نتیجه، تابع f در نقطه‌ی $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر نیست.

---

۲. فرض کنید $f:\mathbb{R}^۳\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد. اگر z به عنوان تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y توسط معادله‌ی $f(\frac{z}{x},\frac{z}{y},\frac{x}{y})=۱$ تعریف شود، نشان دهید z در معادله‌ی دیفرانسیل $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$ صدق می‌کند. (۱۵ نمره)

@jozve_iut

حل. (راه حل اول) قرار می‌دهیم $u(x,y,z)=\frac{z}{x}$، $v(x,y,z)=\frac{z}{y}$ و $w(x,y,z)=\frac{x}{y}$ و

$$g(x,y,z)=f\big(u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z)\big)$$

در این صورت، بنابه فرض مسئله، z به عنوان تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y توسط معادله‌ی $g(x,y,z)=۱$ داده شده است. در نتیجه

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}}=-\frac{f_u\frac{\partial u}{\partial x}+f_v\frac{\partial v}{\partial x}+f_w\frac{\partial w}{\partial x}}{f_u\frac{\partial u}{\partial z}+f_v\frac{\partial v}{\partial z}+f_w\frac{\partial w}{\partial z}}=-\frac{-f_u\frac{z}{x^۲}+f_w\frac{۱}{y}}{f_u\frac{۱}{x}+f_v\frac{۱}{y}} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}}=-\frac{f_u\frac{\partial u}{\partial y}+f_v\frac{\partial v}{\partial y}+f_w\frac{\partial w}{\partial y}}{f_u\frac{\partial u}{\partial z}+f_v\frac{\partial v}{\partial z}+f_w\frac{\partial w}{\partial z}}=-\frac{-f_v\frac{z}{y^۲}-f_w\frac{x}{y^۲}}{f_u\frac{۱}{x}+f_v\frac{۱}{y}} \end{aligned}$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

و در نتیجه

$$\begin{aligned} x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y} &= x\Big(-\frac{-f_u\frac{z}{x^۲}+f_w\frac{۱}{y}}{f_u\frac{۱}{x}+f_v\frac{۱}{y}}\Big)+y\Big(-\frac{-f_v\frac{z}{y^۲}-f_w\frac{x}{y^۲}}{f_u\frac{۱}{x}+f_v\frac{۱}{y}}\Big) \\ &= \frac{\frac{z}{x}f_u-\frac{x}{y}f_w}{f_u\frac{۱}{x}+f_v\frac{۱}{y}}+\frac{\frac{z}{y}f_v+\frac{x}{y}f_w}{f_u\frac{۱}{x}+f_v\frac{۱}{y}} \\ &= z\Big(\frac{\frac{۱}{x}f_u+\frac{۱}{y}f_v}{\frac{۱}{x}f_u+\frac{۱}{y}f_v}\Big)=z \end{aligned}$$

(راه حل دوم) بنابر فرض، تابعی مشتق‌پذیر چون $z(x,y)$ وجود دارد که برای هر (x,y) در معادله‌ی $f(\frac{z(x,y)}{x},\frac{z(x,y)}{y},\frac{x}{y})=۱$ صدق می‌کند. با قرار دادن $u(x,y)=\frac{z(x,y)}{x}$، $v(x,y)=\frac{z(x,y)}{y}$ و $w(x,y)=\frac{x}{y}$، برای هر (x,y) داریم

$$f\big(u(x,y),v(x,y),w(x,y)\big)=۱$$

در نتیجه

@jozve_iut

$$\frac{\partial}{\partial x}f\big(u(x,y),v(x,y),w(x,y)\big)=۰ \quad \text{و} \quad \frac{\partial}{\partial y}f\big(u(x,y),v(x,y),w(x,y)\big)=۰$$

و از آنجا

$$\begin{aligned} ۰ &= f_u\frac{\partial u}{\partial x}+f_v\frac{\partial v}{\partial x}+f_w\frac{\partial w}{\partial x}=f_u\Big(\frac{۱}{x}\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{z}{x^۲}\Big)+f_v\Big(\frac{۱}{y}\frac{\partial z}{\partial x}\Big)+f_w\Big(\frac{۱}{y}\Big) \\ ۰ &= f_u\frac{\partial u}{\partial y}+f_v\frac{\partial v}{\partial y}+f_w\frac{\partial w}{\partial y}=f_u\Big(\frac{۱}{x}\frac{\partial z}{\partial y}\Big)+f_v\Big(\frac{۱}{y}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{z}{y^۲}\Big)-f_w\Big(\frac{x}{y^۲}\Big) \end{aligned}$$

با حل دو معادله‌ی فوق بر حسب $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\frac{z}{x^۲}f_u-\frac{۱}{y}f_w}{\frac{۱}{x}f_u+\frac{۱}{y}f_v} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\frac{z}{y^۲}f_v+\frac{x}{y^۲}f_w}{\frac{۱}{x}f_u+\frac{۱}{y}f_v} \end{aligned}$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

و در نتیجه

$$\begin{aligned} x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\frac{z}{x}f_u-\frac{x}{y}f_w}{\frac{1}{x}f_u+\frac{1}{y}f_v}+\frac{\frac{z}{y}f_v+\frac{x}{y}f_w}{\frac{1}{x}f_u+\frac{1}{y}f_v} \\ &= \frac{\frac{z}{x}f_u+\frac{z}{y}f_v}{\frac{1}{x}f_u+\frac{1}{y}f_v}=z \end{aligned}$$

---

۳. رویه‌ی S به معادله‌ی $z=e^{(x^2+y^2)}$ را در نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید S یک رویه‌ی دوار است.

ب) معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی S در نقطه‌ی $P_0=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},e)$ را بنویسید.

ج) معادله‌ی خطی را بنویسید که در نقطه‌ی P_0 بر خم C حاصل تلاقی رویه‌ی S و صفحه‌ی $z=e$ مماس است. (۲۵ نمره)

حل. الف) (راه حل اول) فرض کنیم C_0 خم حاصل از برخورد رویه‌ی S با صفحه‌ی yoz باشد. در این صورت C_0 خمی به معادله‌ی $z=e^{y^2}$ یا به معادله‌ی $f(y,z)=e^{y^2}-z=0$ می‌باشد. رویه‌ی حاصل از دوران این خم حول محور z، رویه‌ای به معادله‌ی

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=e^{(x^2+y^2)}-z=0$$

خواهد بود که همان رویه‌ی داده شده در صورت سئوال است. پس رویه‌ی مورد نظر حاصل دوران خم فوق حول محور z است.

(راه حل دوم) صفحه‌ی $z=k$ (به شرط $k>1$) رویه‌ی فوق را در دایره‌ی $x^2+y^2=\ln k$ قطع می‌کند. با توجه به اینکه با تغییر $k>1$ مراکز دایره‌های حاصل همه بر محور z قرار دارند، پس رویه‌ی فوق رویه‌ای دوار حول محور z است.

ب) اگر قرار دهیم $g(x,y,z):=e^{(x^2+y^2)}-z$ آنگاه رویه‌ی S دارای معادله‌ی $g(x,y,z)=0$ است و از آنجا بردار ∇g در هر نقطه از این رویه بردار نرمال صفحه‌ی مماس بر رویه در آن نقطه خواهد بود. داریم

$$\nabla g=(2xe^{(x^2+y^2)})\mathbf{i}+(2ye^{(x^2+y^2)})\mathbf{j}+(-1)\mathbf{k}$$

در نتیجه در نقطه‌ی $P_0=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},e)$،

$$\nabla g(P_0)=\sqrt{2}e\mathbf{i}+\sqrt{2}e\mathbf{j}-\mathbf{k}$$

@jozve_iut

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

و در نتیجه معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر S در $P_\circ$ عبارت است از $\sqrt{2}e(x-\frac{\sqrt{2}}{2})+\sqrt{2}e(y-\frac{\sqrt{2}}{2})-(z-e)=0$

ج) (راه حل اول) خط مماس بر خم C در نقطه‌ی $P_\circ$، در صفحه مماس بر رویه در این نقطه (صفحه به دست آمده در قسمت قبل) قرار دارد. از طرف دیگر، این خط در داخل صفحه‌ی $z=e$ نیز قرار گرفته است. بنابر این حاصل‌ضرب برداری نرمال‌های دو صفحه‌ی فوق را می‌توانیم به عنوان بردار هادی این خط انتخاب کنیم. با توجه به اینکه یک بردار نرمال صفحه‌ی $z=e$ بردار $\mathbf{k}$ است، بردار هادی خط مورد نظر عبارت است از

$$\nabla g(P_\circ)\times\mathbf{k}=\left(\sqrt{2}e\mathbf{i}+\sqrt{2}e\mathbf{j}-\mathbf{k}\right)\times\mathbf{k}=-\sqrt{2}e\mathbf{j}+\sqrt{2}e\mathbf{i}=\sqrt{2}e\mathbf{i}-\sqrt{2}e\mathbf{j}$$

پس معادلات پارامتری این خط به صورت زیر خواهند بود.

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}et+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=-\sqrt{2}et+\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad t\in\mathbb{R} \\ z=e \end{cases}$$

(راه حل دوم) ابتدا معادلات پارامتری خم حاصل از برخورد رویه‌ی S و صفحه‌ی $z=e$ را به دست می‌آوریم.

@jozve_iut

$$C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y,x)\in S \text{ و } z=e\}=\{(x,y,e)\in\mathbb{R}^3 \mid e^{(x^2+y^2)}=e \text{ یا } x^2+y^2=1\}$$

بنابر این C دارای معادلات پارامتری $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=e \end{cases}$، $t\in[0,2\pi]$، است. نقطه‌ی $P_\circ=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},e)$ نظیر $t=\frac{\pi}{4}$ است. اگر قرار دهیم $\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{i}+(\sin t)\mathbf{j}+e\mathbf{k}$ آنگاه $\mathbf{r}'(\frac{\pi}{4})=-\sin(\frac{\pi}{4})\mathbf{i}+\cos(\frac{\pi}{4})\mathbf{j}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$ بردار هادی خط مماس بر این خم در نقطه‌ی نظیر $t=\frac{\pi}{4}$ خواهد بود. در نتیجه معادلات پارامتری خط مورد نظر عبارتند از

$$L:\begin{cases} x=-\frac{\sqrt{2}}{2}t+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t+\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad t\in\mathbb{R} \\ z=e \end{cases}$$

توجه می‌کنیم که در حالت اخیر بردار هادی خط به دست آمده، ضریبی از بردار هادی به دست آمده در روش قبلی است.

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

به نام خالق یکتا

آزمون میان ترم ریاضی عمومی دو

فروردین ماه ۱۳۹۸

دانشکده علوم ریاضی — مدت آزمون: ۹۰ دقیقه

---

۱. وجود حد تابع $f(x,y)=\dfrac{xy^{8}}{x^{3}+y^{12}}$ را در نقطه‌ی $(0,0)$ بررسی کنید. (۱۰ نمره)

---

۲. تابع f با ضابطه‌ی
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{2}\tan y}{x^{2}+y^{2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
مفروض است. (۲۰ نمره)

الف) نشان دهید f در $(0,0)$ پیوسته است.

ب) مقادیر $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ را محاسبه کنید.

@jozve_iut

ج) مشتق سویی تابع f در $(0,0)$ را در جهت بردار یکه‌ی دلخواه $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ بدست آورید.

د) آیا f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر است؟ چرا؟

---

۳. فرض کنید f یک تابع دو متغیره‌ی مشتق‌پذیر باشد و $w=f(\dfrac{y-x}{xy},\dfrac{z-x}{xz})$. نشان دهید (۱۵ نمره)،
$$x^{2}\frac{\partial w}{\partial x}+y^{2}\frac{\partial w}{\partial y}+z^{2}\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

---

۴. الف) صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی $z^{2}=x^{2}+y^{2}-1$ را در نقطه‌ی $(2,1,2)$ بدست آورید.

ب) نقطه‌ای از رویه‌ی $z^{2}=x^{2}+y^{2}-1$ را تعیین کنید که صفحه‌ی مماس بر آن با صفحه‌ی مماس در قسمت الف موازی است. (۱۵ نمره)

موفق باشید

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان
Scanned by CamScanner

کلید تصحیح سوالهای ۱ و ۲ میانترم.

لطفا پیش از مراجعه برای اعتراض حتما این کلید را مطالعه بفرمائید.

جواب سوال ۱ . یکی از شروط لازم برای این که تابع $z = f(x, y)$ در نقطه‌ی $(۰, ۰)$ حد داشته باشد این است که روی تمام مسیرهای $f(x, y) = k$ **که از مبدأ می‌گذرند** حدهای یکسانی داشته باشد. روی مسیر $y = x$ (۲ نمره) داریم

$$f(x, x) = \frac{x^{۹}}{x^{۳} + x^{۱۲}} = \frac{x^{۶}}{۱ + x^{۹}} \quad x \neq ۰$$

بنابراین

$$\lim_{x \to ۰} f(x, x) = ۰$$

۳ نمره.

روی مسیر $x^{۳} = y^{۱۲}$ یا ($x = y^{۴}$)داریم

$$\lim_{y \to ۰} f(y^{۴}, y) = \lim_{y \to ۰} \frac{y^{۱۲}}{y^{۱۲} + y^{۱۲}} = \frac{۱}{۲}$$

توجه کنید که هر دوی این مسیر از مبدأ می‌گذرد. ۳ نمره.

از آنجا که روی دو مسیر متفاوت به دو مسیر متفاوت رسیده‌ایم، تابع مورد نظر در $(۰, ۰)$ حد ندارد. ۲ نمره.

جواب سوال ۲ . الف) در $(x, y) \neq (۰, ۰)$ (از آنجا که $\frac{x^{۲}}{x^{۲}+y^{۲}} \leqslant ۱$) داریم:

@jozve_iut

$$۰ \leqslant |f(x, y) - f(۰, ۰)| = \left|\frac{x^{۲} \tan y}{x^{۲} + y^{۲}}\right| \leqslant |\tan y|$$

بنابراین

$$۰ \leqslant \lim_{(x,y)\to(۰,۰)} |f(x, y) - f(۰, ۰)| \leqslant \lim_{y \to ۰} |\tan y| = ۰$$

پس $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x, y) = f(۰, ۰)$.

۵ نمره.

توجه: اکثر دانشجویان به اشتباه نوشته‌اند که $|\tan(y)| \leq |y|$. در واقع عکس این گفته برقرار است. به همه‌ی این دانشجویان (در صورتی که بقیه‌ی بحث را درست نوشته باشند، ۲,۵ نمره تعلق گرفته است).

ب)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(۰, ۰) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(h, ۰) - f(۰, ۰)}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{۰ - ۰}{h} = ۰$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(۰, ۰) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(۰, h) - f(۰, ۰)}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{۰ - ۰}{h} = ۰$$

۵ نمره.

توجه. تعداد زیادی از دانشجویان مقادیر مشتقات جزئی را با استفاده از ضابطه (و نه تعریف)محاسبه کرده‌اند که به آنها هیچ

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut
Scanned by CamScanner

نمره‌ای تعلق نگرفته است؛ هر چند به عدد صفر اشاره کرده باشند.

ج)

$$D_{\vec{u}=(a,b)}f(\text{۰},\text{۰}) = \lim_{h\to \text{۰}} \frac{f(\text{۰}+ah,\text{۰}+bh)-f(\text{۰},\text{۰})}{h} = \lim_{h\to \text{۰}} \frac{a^{\text{۲}}h^{\text{۲}}\tan(bh)}{h(a^{\text{۲}}h^{\text{۲}}+b^{\text{۲}}h^{\text{۲}})} = \lim_{h\to \text{۰}} \frac{h^{\text{۲}}a^{\text{۲}}\tan(bh)}{h^{\text{۲}}(a^{\text{۲}}+b^{\text{۲}})h} =$$

$$\lim_{h\to \text{۰}} \left(\frac{a^{\text{۲}}}{a^{\text{۲}}+b^{\text{۲}}}\right)\underbrace{\frac{\tan(bh)}{h}}_{\text{همگرا به } b} = \frac{ba^{\text{۲}}}{a^{\text{۲}}+b^{\text{۲}}} = \frac{ba^{\text{۲}}}{\text{۱}}$$

(بردار مورد نظر یکه است $a^{\text{۲}}+b^{\text{۲}}=\text{۱}$). ۵ نمره.

د) یک شرط**لازم** برای مشتق‌پذیر بودن تابع f در نقطه‌ی $(\text{۰},\text{۰})$ این است که رابطه‌ی زیر برای مشتق سوئی آن برقرار باشد:

$$D_{\vec{u}=(a,b)}f(\text{۰},\text{۰}) = f_x(\text{۰},\text{۰})a + f_y(\text{۰},\text{۰})b$$

بنا به موارد ب و ج داریم:

$$(a,b)\neq(\text{۰},\text{۰}) \Rightarrow ba^{\text{۲}} \neq \text{۰}\times a + \text{۰}\times b$$

پس تابع یاد شده در نقطه‌ی $(\text{۰},\text{۰})$ مشتق‌پذیر نیست. ۵ نمره.

توجه: شرط بالا برای مشتق‌پذیری کافی نیست (لازم است). اگر در قسمتهای قبلی به علت عدم محاسبه‌ی صحیح، به این نتیجه رسیده باشید که مشتق سوئی وجود ندارد و از آن عدم مشتق‌پذیری را نتیجه گرفته باشید تنها ۱ نمره تعلق گرفته است.

@jozve_iut

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان
Scanned by CamScanner

جواب ۳)

قرار دهید

$$u = \frac{y-x}{xy} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

۳ نمره

$$v = \frac{z-x}{xz} = \frac{1}{x} - \frac{1}{z}$$

$$\Longrightarrow \omega = f(u,v)$$

اکنون با استفاده از قاعده زنجیره‌ای توابع چند متغیره داریم

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

۳ نمره

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

۳ نمره

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{1}{y^2}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)(0) = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{1}{y^2}$$

@jozve_iut

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}$$

۳ نمره

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)(0) + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\left(\frac{1}{z^2}\right) = \frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{z^2}$$

در نتیجه

۳ نمره

$$x^2\frac{\partial \omega}{\partial x} + y^2\frac{\partial \omega}{\partial y} + z^2\frac{\partial \omega}{\partial z}$$

$$= x^2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{-1}{x^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{-1}{x^2}\right) + y^2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{1}{y^2}\right) + z^2\left(\frac{\partial f}{\partial v}\frac{1}{z^2}\right)$$

$$= -\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$= 0$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

Scanned by CamScanner

سؤال ۴ (الف)

بردار نرمال چنین صفحه‌ای به صورت

(۱) $\vec{N_1} = \vec{\nabla} F(2,1,2)$

خواهد بود که در آن

$F(x,y,z) = z^2 - x^2 - y^2 + 1$

اما

(۲) $\vec{\nabla} F(x,y,z) = -2xi - 2yj + 2zk$

$\vec{N_1} = -4i - 2j + 4k$

اما معادله کلی صفحه با بردار نرمال $\vec{N} = ai + bj + ck$ که از نقطه $P = (x_0, y_0, z_0)$ می‌گذرد به صورت

(۱) $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

است یعنی در اینجا

(۱) $\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \\ z_0 = 2 \end{cases}$ و $\begin{cases} a = -4 \\ b = -2 \\ c = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow -4(x-2) - 2(y-1) + 4(z-2) = 0$

$\Rightarrow -4x + 8 - 2y + 2 + 4z - 8 = 0$

(۱) $\Rightarrow 4x + 2y - 4z = 2$

$\rightarrow$ $\boxed{2x + y - 2z = 1}$

حل (ب) در صفحه بعد

@jozve_iut

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

Scanned by CamScanner

جواب

سوال ۴ (ب)

قرار دهید

$$F(x,y,z) = z^2 - x^2 - y^2 + 1 = 0$$

بردار نرمال هر صفحه مماس بر رویه در نقطه‌ای واقع بر رویه برابر است با

(1)
$$\vec{N} = \vec{\nabla} F(x,y,z) = F_x i + F_y j + F_z k$$
$$= -2xi - 2yj + 2zk$$

(2)

بنا بر فرض مسئله باید

$$\vec{N} \parallel \vec{N_1}$$

که در آن $\vec{N_1}$ بردار نرمال بر صفحه مماس در قسمت (الف) است. اما

$$\vec{N_1} = -4i - 2j + 4k$$

(1)
$$\vec{N} = t\vec{N_1}$$

$$\Rightarrow -2xi - 2yj + 2zk = -4ti - 2tj + 4tk$$

(2)
$$\Rightarrow Q: \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases}$$

چون این نقطه می‌خواهد واقع بر رویه باشد باید

(2)
$$(2t)^2 - (2t)^2 - t^2 + 1 = 0$$
$$t^2 = 1 \rightarrow t = \pm 1$$

با $t=1$ همان نقطه داده شده در قسمت (الف) به دست می‌آید یعنی $P = (2, 1, 2)$

با $t=-1$ نقطه‌ای دیگر به دست می‌آید یعنی

(1)
$$Q = (-2, -1, -2)$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان
Scanned by CamScanner

جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

@jove_iut

www.jozve-iut.ir